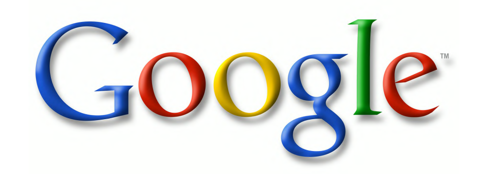
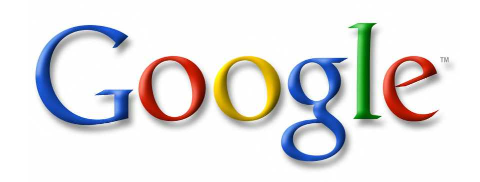

Google





Philip Earl Stanhope.

NOUVEAUX ELEMENS D'ARITHMETIQUE ET D'ALGEBRE.

OU

INTRODUCTION AUX MATHEMATIQUES.

Par M. DE LAGNY, de l'Academie Royale des Sciences.



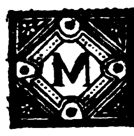
A PARIS,
Chez JEAN JOMBERT, prés des Augustins, à l'Image Nôtre-Dame.

M. DC. XCVII.
AVEC PRIVILEGE DU ROY.



A MONSEIGNEUR

LE CHANCELIER.


ONSEIGNEUR,

La protection dont VÔTRE GRANDEUR *honore les Arts & les Sciences, pourroit en quelque maniere justifier la liberté que je prens de luy offrir ces nouvelles découvertes sur divers sujets*

de Mathematique & de Physique ; mais outre cette raison générale je m'y trouve engagé par l'attachement particulier que j'ay à Vôtre Illustre Maison, & qui m'a donné lieu de consacrer à son service ce que je puis avoir de lumieres & d'experience sur ces matieres.

La France a veu depuis deux siécles ses Chanceliers presque aussi appliquez à faire fleurir les Sciences que la Justice ; mais aucun de ces grands hommes ne l'a fait avec plus d'éclat que VÔTRE GRANDEUR. *A peine futes vous élevé à cette dignité supreme que vous donnâtes vos ordres pour que des gens habiles travaillassent à l'ouvrage le plus utile qui ait paru, & dont le dessein*

ayant été d'abord formé à Paris, a servi ensuite de modele à tous les païs étrangers. Cet Ouvrage a été retabli par vos soins dans son ancienne réputation ; & c'est à Vous MONSEIGNEUR, *que le public est rédevable de cette connoissance exacte & générale qu'on luy donne de ce que l'Europe Sçavante produit tous les jours de nouveau.*

Vôtre bonté en faveur des gens de Lettres a été encore plus loin ; tous ceux qui se sont distinguez par leurs sçavoir & par leurs écrits, ont senti les effets de Vôtre puissante protection ; & ils ont été prévenus & comblez de ces graces dont SA MAJESTÉ *vous a fait le fidéle dépositaire.*

Ce seroit m'écarter de mon sujet

si j'entreprenois icy de vous loüer, par tous les endroits qui vous ont attiré l'estime du Prince, & l'admiration de ses Sujets ; mais je ne puis refuser à mon Zele de toucher au moins une partie de ces grandes qualitez, dont Vôtre modestie & mon respect m'empêchent de faire l'éloge.

La nature, l'étude, l'experience, & la Religion ont concouru pour former en vôtre personne un Magistrat accompli. La nature vous a donné de grands talens, l'étude a étendu vos connoissances, l'experience vous a fourni de nouvelles lumieres, & la Religion à laquelle on vous a toûjours veu si fidellement attaché, les a consacrées au bien général de l'Etat. Vôtre esprit également vaste & solide

entre dans les plus importantes affaires, & descend en même tems dans les plus petits détails. Il embrasse à la fois une infinité de differens objets sans les mêler ni les confondre. Tout cela se trouve soûtenu d'un fond de probité & de droiture, vertus si necessaires à ceux que la providence a destinez pour faire regner l'équité dans les tribunaux. Vous donnez un libre accez aux foibles & aux malheureux. Vous écoutez leurs plaintes, Vous compatissez à leurs déplaisirs, & vous les consolez par l'esperance, ou d'une prompte justice, ou d'une meilleure fortune.

Dans combien de grandes Charges, dans quels Emplois de distinction n'avez vous point fait paroître & vos talens & vos vertus

démêlant le droit des particuliers, faisant regner l'abondance & l'ordre dans les Armées, reformant par tout les abus & donnant le repos à plusieurs Provinces? quel merite plus soûtenu, plus constant que le vôtre, & plus généralement applaudi! On vous a veu toûjours égal à vous même dans les tems les plus difficiles; toûjours actif, vigilant, infatigable, incorruptible; toûjours au dessus de vos Emplois. Tout au Prince par vôtre Zele, tout au peuple par vôtre bonté.

Faut-il donc s'étonner que le Roy vous ait honoré de son choix, lorsqu'il voulut remplir le poste éminent que vous occupez aujourd'huy? quelle gloire d'être élevé à la premiere dignité d'un Royaume

si florissant, & d'y être élevé par le choix d'un Prince toûjours guidé par la sagesse, & sous le regne duquel les grandes dignitez sont des preuves certaines du grand merite, & les plus glorieuses recompenses, le prix assuré de la plus haute vertu!

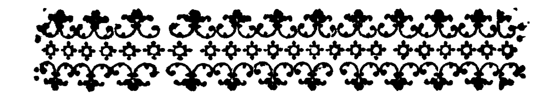
Les marques sensibles que ce Grand Roy vous a tant de fois donné de son estime & de sa confiance, & les nouveaux témoignages que vous venez d'en recevoir, doivent être considerez, comme de nouveaux accroissemens de gloire pour vous; & ils sont d'autant plus pretieux que la source en est plus pure & plus brillante. Puissiez vous, MONSEIGNEUR, *pour la felicité publique joüir de ces avantages aussi long-tems que*

SA MAJESTÉ, *elle même a marqué souvent le souhaiter. Ce sont les vœux de toute la France, & les desirs ardens de celuy qui est avec un tres profond respect & un attachement inviolable,*

MONSEIGNEUR,

DE VÔTRE GRANDEUR,

Le tres-humble & tres-obeïssant serviteur,
DE LAGNY.



AVERTISSEMENT.

L'Algebre paroît d'abord si rebutante par la nouveauté des termes & des caracteres qu'elle emploïe, & par la secheresse de la matiere qu'elle traitte, qu'il n'est pas surprenant que peu de gens ayent, ou assez de curiosité pour commencer à s'y appliquer, ou assez de fermeté pour continuer de s'y attacher autant de tems qu'il faut pour en tirer quelque avantage. La plûpart même des Savans ne regardent cette Science, que comme une occupation vaine & penible de gens oisifs, qui se forment exprés des difficultez arbitraires, afin d'avoir le plaisir de les resoudre.

Pour détruire un préjugé si general & si injuste, il faut remonter aux principes & donner une

idée claire & diſtincte de la nature & des uſages de cette Science; peut-être qu'aprés une exacte diſcuſſion on conviendra qu'il y a peu de Sciences plus agréables ni plus utiles.

Tout ce qu'on peut connoître des corps, outre les qualitez ſenſibles & les proprietez générales de la matiere, comme la diviſibilité à l'infini, la figure & le mouvement, ſe reduit aux rapports de grandeur que ces corps ont entre-eux, ſoit qu'on les compare ſelon leur ſolidité ou leur maſſe, ſoit que l'on ne compare que leurs lignes, leurs angles ou leurs ſurfaces; mais nous connoiſſons les corps de deux manieres, l'une générale, exacte & purement intelligible, l'autre particuliere, imparfaite & ſenſible. Les idées de la Ligne droite, de l'Angle, du Triangle, du Quarré, du Cercle, de la Piramide, du Cube, de la Sphere, ſont des idées générales, exactes, purement intelligibles; & les mê-

mes dans tous les hommes. Les idées du Soleil, de la Terre, d'un Arbre ſont des idées particulieres, des idées ſenſibles qui ne ſont point exactes, & apparemment differentes dans chacun, ſelon la difference des impreſſions plus ou moins fortes qu'il reçoit par les ſens; & ſelon la difference du rapport de grandeur entre les organes, des ſens, les objets qui les frappent, & le corps entier de celuy qui apperçoit ces objets.

Les rapports de ces corps ſenſibles peuvent être connus, ou par l'experience ſeule, ou par la raiſon ſeule, ou en partie par la raiſon & en partie par l'experience. L'experience ne nous peut rien apprendre avec une entiere certitude; il y a pourtant une maniere de s'y conduire avec ordre, en ſorte qu'on ſoit aſſuré d'approcher de la verité par le plus court chemin, & le plus prés qu'il eſt poſſible par les ſens; il faut toûjours commencer par cette expe-

rience methodique lorſqu'il s'agit des corps ſenſibles. Et c'eſt ainſi que tous les raiſonnemens des Aſtronomes & des Geographes ſuppoſent les obſervations ; mais à cauſe de cette incertitude attachée inſeparablement & eſſentiellement à l'experience, il ne faut s'en ſervir qu'autant preciſément qu'il eſt neceſſaire pour determiner la queſtion, à quoy la raiſon ne peut pas ſuppléer, parce que ce ſont des faits qu'on ne peut deviner.

L'experience eſt abſolument inutile pour découvrir les rapports des corps Geometriques. Par exemple il eſt ridicule de chercher la quadrature du Cercle en peſant un Cercle & un Quarré faits de même matiere & de même épaiſſeur ; mais on peut toûjours trouver exactement ces rapports, ou du moins en approcher à l'infini par la raiſon ſeule, & ſans faire aucune experience, en ne conſultant que l'idée de l'étenduë figurée, & celle des nombres.

Ainsi la raison peut bien suppléer en partie à l'experience par rapport aux corps sensibles, mais l'experience ne peut en rien suppléer à la raison par rapport aux corps Geometriques; l'experience peut seulement servir d'occasion à chercher des raisons qui confirment ou qui corrigent le témoignage des sens.

Lorsqu'on connoît les rapports exacts des corps Geometriques & de leurs dimensions, il n'y a de difficulté à connoître le rapport des corps sensibles qu'autant que l'application des Regles générales aux cas particuliers, demande de l'usage & une certaine adresse à se servir des Instrumens; & cette adresse paroît excellemment chez les Astronomes & les Geographes. Il est donc tres-important de connoître ces rapports des corps Geometriques. Or il n'y a que deux methodes pour parvenir à cette connoissance, qui sont la Sinthese & l'Analyse.

Par la Sinthese on compare & on combine les premieres & les plus simples proprietez connuës d'un sujet, pour en tirer de nouvelles proprietez qui servent à en trouver d'autres, & celles-cy en font encore decouvrir de plus composées ; & ainsi de suite à l'infini. Si dans cette methode on suivoit un ordre exact, on seroit assuré de trouver successivement toutes les proprietez, & tous les rapports connoissables de son sujet ; mais parce que le nombre des combinaisons devient d'abord immense, on n'auroit jamais fait à les examiner toutes par ordre ; & il faut une certaine habitude & une certaine habileté, qui ne s'acquiert que par un long usage pour rejetter comme du premier coup d'œil les combinaisons inutiles, & n'examiner que celles qui peuvent conduire à quelque proprieté considerable. Cette methode est générale pour toutes sortes de sujets & de Sciences, mais

je n'en parle icy que par rapport aux Mathematiques.

C'eſt ainſi que les anciens Geometres, en ne ſuppoſant que leurs definitions, leurs axiomes & leurs demandes ont fait apparemment toutes leurs découvertes. Par exemple, lors qu'ils ont trouvé cette admirable proprieté du Triangle rectangle, *que le quarré du côté opposé à l'angle droit eſt égal aux quarrez des deux autres*, ils ne penſoient peut-être ſimplement qu'à découvrir de nouvelles proprietez du triangle, & celle-là s'eſt preſentée à leur eſprit.

On peut au contraire en ſe ſervant de la Sintheſe avoir un but determiné, comme *de trouver le rapport qu'il y a entre les quarrez des côtez d'un triangle rectangle*; & alors on tente ſucceſſivement divers chemins abbregez, qui paroiſſent pouvoir conduire à ce qu'on cherche; c'eſt à dire on examine les proprietez déja connuës pour

tacher en les comparant, de découvrir celle qu'on ne connoît pas. Je dis qu'on tente successivement des chemins *abbregez*, parce que la voye générale des combinaisons est impraticable par sa longueur.

Dans la premiere maniere de se servir de la Sinthese, le chemin dépend du choix, mais le but est incertain & dépend en quelque maniere du hazard; dans la seconde maniere au contraire, le but est certain, & le choix du chemin ne l'est pas; & dans l'une & l'autre de ces manieres, l'Algebre est d'un tres grand secours. Car au lieu de comparer par un effort penible d'esprit & d'imagination, plusieurs lignes, plusieurs angles, plusieurs surfaces, &c. Il suffit d'exprimer par des lettres de l'Alphabet les rapports donnez ou connus de quelques lignes droites, qui déterminent le rapport des autres dimensions; & on ajoûte, on soustrait, on multiplie, &c. ces lettres les unes par les autres

à mesure que consultant l'idée de l'étenduë figurée, on voit qu'il faut ajoûter, soustraire ou multiplier les lignes mêmes; & l'on découvre sans peine de nouveaux rapports avec beaucoup moins de risque de se tromper, parce qu'on n'est pas obligé, comme dans la Geometrie ordinaire, d'envisager à la fois une longue suite de principes & de raisonnemens; & qu'on peut au contraire s'arrêter où l'on veut, & reprendre ensuite ses recherches.

Cette maniere d'exprimer les nombres ou les rapports par des lettres de l'Alphabet ne doit pas paroître rebutante. Les Hebreux, les Grecs & les Romains s'en sont servis pour exprimer les nombres que nous exprimons par des chifres. Les Philosophes & les Geometres ont emploïé ces mêmes lettres pour designer d'une maniere générale toute sorte de choses. Cette expression est tres-simple & tres-fami-

liere, il eſt aiſé de s'y accoûtumer; & les operations en ſont beaucoup plus faciles que celles des chifres dans l'Arithmetique ordinaire.

Si l'Algebre eſt utile dans la Sintheſe, on peut dire qu'elle eſt preſque abſolument neceſſaire dans l'Analyſe, qui eſt la ſeconde methode générale pour découvrir toutes ſortes de veritez; mais je n'en parle icy que par rapport aux Mathematiques. Je diſtingue deux eſpeces d'Analyſes, celle des Anciens & celle des Modernes. Dans celle là on commence par ſuppoſer que la propoſition qu'on veut examiner eſt vraye, ou que la queſtion qu'on veut reſoudre eſt effectivement reſoluë. L'on examine ce qui doit ſuivre neceſſairement & reciproquement de cette ſuppoſition, juſques à ce qu'en remontant pour ainſi dire vers les premiers principes, on trouve quelque proprieté connuë, ou quelque abſurdité manifeſte. Si

l'on trouve quelque proprieté connuë, on conclut que la proposition est vraye, ou que la question peut être resoluë ; & on la resout effectivement en commençant par la proprieté connuë, & remontant jusques à la question proposée par la même suite de raisonnemens & de consequences ; si l'on trouve quelque absurdité, on conclut que la proposition est fausse, & que la question est impossible. Cette methode est plus commode & plus utile que la Sinthese dans la pluspart des propositions & des questions, sur tout dans celles qui ne dépendent pas précisément & immediatement des combinaisons ; car pour celles-là il n'y a presque que la Sinthese. L'avantage de l'Analyse consiste en ce que lon a un point fixe d'où l'on commence ses recherches ; elle est ordinairement plus courte que la Sinthese, & plus propre pour inventer ; mais d'un autre côté elle est sujette au même tâtonnement pour

le choix du chemin qu'on doit ſuivre, & elle demande la même contention d'eſprit & d'imagination, à moins qu'on ne ſe ſerve des expreſſions & de la methode Algebraiques; enfin elle eſt moins propre & moins naturelle pour enſeigner que la Sintheſe.

Dans l'Analyſe des Modernes on exprime indifferemment par des lettres de l'Alphabet les lignes qui ſont données ou connuës, & celles qui ne le ſont pas; c'eſt à dire qu'on exprime les nombres donnez ou connus par de certaines lettres, & les nombres inconnus par d'autres lettres. On opere enſuite ſur ces lettres par addition, ſouſtraction, multiplication, &c. conformément à la propoſition ou à la queſtion, juſques à ce que l'on trouve deux expreſſions ſemblables ou differentes d'une même valeur, & où il n'y ait qu'un nombre inconnu, ajoûté, ſouſtrait, multiplié, &c. égal à un nombre connu. Lorſque les deux

expressions sont égales & semblables, c'est une preuve que la proposition est vraye, ou que la question est tellement indéterminée, que tout nombre peut y satisfaire; lorsque les deux expressions sont differentes, le Probleme se reduit à trouver un nombre ou une ligne qui étant ajoûtée soustraite, multipliée, &c. ce qui resulte soit égal à un nombre ou à une ligne donnée; c'est ce qu'on appelle une *équation*. Et c'est le moyen général & universel, le moyen seul & unique dont on se sert dans l'Analyse Algebraïque pour resoudre toutes sortes de questions. Car on ne cherche jamais dans les questions Mathematiques que des rapports en nombres, & tous les rapports se réduisent à celuy de l'égalité. Par exemple dire que a est double de b, c'est dire que a est égal à $2b$; & dire que a est à b comme 2 à 3, c'est dire que $3a$ est égal à $2b$; & ainsi du reste.

Il s'ensuit de tout ce que je viens de dire, que l'Algebre est un moyen sûr, facile, inépuisable, pour faire tous les jours de nouvelles découvertes; & comme le desir de connoître la verité, est une des plus fortes passions de l'esprit humain, rien ne peut tant contribuër à la satisfaire innocemment que l'étude de cette Science. Ce sont des plaisirs purs, des plaisirs continuels & tres-vifs, qu'on peut se procurer sans peine & sans remords; on ne peut pas douter de son utilité, puis qu'elle s'étend à toutes les parties des Mathematiques, dont tout le monde connoît l'usage ou plûtôt la necessité.

Il ne me reste plus qu'à dire un mot sur l'origine & le progrez de cette Science, & sur l'ordre que j'ay suivi dans ce petit Traité.

Le mot d'Algebre vient de l'Arabe, comme il est aisé de le connoître par l'article *al*. Ce n'est pas que les Arabes & entre autres un cer-

tain *Geber*, qu'on pretend avoir vécu vers le milieu du onziéme ſiécle, en ſoient inventeurs. Les Arabes n'ont fait tout au plus que nous conſerver ce que les Grecs avoient inventé. Quelques Auteurs tirent l'étimologie de l'Algebre d'un mot Hebreu, dont la racine ſignifie *force & puiſſance*, pour marquer l'étenduë & la force de ſes Regles.

Le plus ancien Auteur que nous ayons ſur l'Algebre eſt Diophante d'Alexandrie, qui vivoit ſuivant le calcul de Monſieur Bachet, il y a prés de quinze cens ans; il fut traduit dans le ſiécle paſſé ſur des Manuſcrits du Vatican par Guillaume Xylander, & commenté enſuite par Meſſieurs Bachet & de Fermat.

Il n'y a gueres plus de 200 ans qu'on a commencé de connoître l'Algebre en Europe, & ce fut par le moyen de quelques Religieux Italiens de l'Ordre de S. François, qui apporterent de l'Orient les premieres Regles, auſquelles ils don-

nerent le titre de Regles de *la chose* ou de *l'almucabula*. Tartalea, Cardan, Stiffel, Raphaël Bombelli &c. débroüillerent & perfectionnerent ces premieres Regles. Tartalea sur tout en inventa de nouvelles pour la resolution des équations du troisiéme degré. Ils vivoient vers le milieu du siécle passé.

Monsieur Viete, Maître des Requêtes sous Henri III. fut le plus grand Algebriste de son siécle; c'est luy qui a inventé l'Algebre specieuse & la methode générale de resoudre numeriquement toutes les équations. Cette methode a été ensuite perfectionnée par Messieurs Harriot, Ougtred Pell, &c.

Monsieur Descartes enfin a inventé plusieurs nouvelles Regles, & il a appliqué plus heureusement que Viete l'Algebre à la Geometrie. C'est luy qui a enseigné le premier la methode générale de resoudre toutes les équations déterminées & indéterminées par la Geometrie,

& qui a ouvert le chemin à une infinité de nouvelles découvertes qu'on a fait depuis en ſuivant, en abbregeant & en perfectionnant ſa methode pour les Tangentes.

Je ne parleray point icy de plusieurs Auteurs celebres qui ſont encore en vie, leurs ouvrages font aſſez leur éloge ; & je craindrois d'en dire toûjours trop à leur gré, & trop ou trop peu au gré des autres.

Comme la reſolution des équations eſt l'objet & la fin de toute l'Algebre, ce Traité roule tout entier ſur les équations, & je l'ay diviſé en trois parties.

Dans la premiere je donne toutes les Regles du calcul Arithmétique & litteral, & qui ſont neceſſaires pour former les équations.

La ſeconde partie contient la maniere de preparer ces équations, lors qu'elles ſont formées.

Enfin dans la troiſiéme je donne toutes les differentes methodes

qu'on a trouvées, pour resoudre ces mêmes équations aprés qu'elles ont été préparées.

J'ay taché de ne rien omettre de ce que les Anciens & les Modernes nous ont donné ; & j'y ay ajoûté une vingtaine de methodes & de demonstrations nouvelles sur la division, les fractions, les incommensurables, l'extraction & l'approximation des racines, & enfin sur la resolution des équations.

Au reste en ne citant pas continuellement les Auteurs, dont je me suis servi, je n'ay pas prétendu les priver des loüanges qui leur sont dûës, & beaucoup moins m'attribuër leurs nouvelles découvertes ; mais j'ay cru que dans des choses de notorieté publique, c'étoit une précaution superfluë.

Voicy l'ordre que j'ay suivi dans la premiere Partie.

L'Algebre n'a precisément pour objet que les nombres. Ces nombres sont ou particuliers & connus, com-

me un, deux, trois, &c. & on les exprime par des chifres : ou ils ſont ſimplement donnez en général, où *ils* ſont inconnus ; & dans ces deux derniers cas on les exprime par des lettres.

Toutes les operations qu'on peut faire ſur les nombres de quelque maniere qu'ils ſoient exprimez ſe réduiſent à deux, *augmenter* & *diminuer*. On augmente par trois operations, l'addition, la multiplication & la formation des puiſſances ; on diminuë par trois operations oppoſées, la ſouſtraction, la diviſion & l'extraction des racines. Dans le premier Livre je donne les Regles pour l'addition, la ſouſtraction, la multiplication & la diviſion des nombres entiers exprimez en chifres & en lettres.

L'addition & la ſouſtraction imparfaite forment des nombres entiers d'une nouvelle eſpece qu'on appelle *nombres complexes*. C'eſt pourquoy dans le ſecond Livre je

donne les Regles de l'addition de la soustraction, de la multiplication & de la division de ces nombres complexes.

La division imparfaite des nombres entiers forment une nouvelle espece de nombres qu'on appelle *fractions*, c'est pourquoy dans le troisiéme Livre je donne toutes les Regles des operations sur les fractions. Ces operations sont de deux sortes, les unes propres & particulieres aux fractions, & que je comprens sous le nom général de *reduction*; les autres sont communes aux nombres entiers & aux fractions, comme l'addition, la soustraction, &c. A l'occasion des reductions je donne un Traité nouveau des rapports & des proportions, dans lequel on trouve la Regle de trois par corollaire, & les fractions decimales. Comme je n'ay rien voulu supposer, pas même les Elemens d'Euclide, j'ay été obligé de démontrer exactement ces reductions, & c'est peut-être le seul en-

droit de ces Elemens qui sera quelque peine aux commençans.

La formation des puissances est une espece de multiplication reïterée & abbregée, & la resolution de ces puissances ou l'extraction des racines est une espece de division opposée. Je donne dans le quatriéme Livre les Regles de ces deux operations pour les nombres entiers & rompus, complexes & incomplexes, en chifres & en lettres.

L'extraction imparfaite des racines forme une nouvelle espece de nombres qu'on appelle *incommensurables*. Ces nombres ont comme les fractions leurs operations propres & particulieres, que je comprens sous le nom général de *reduction*, & leurs operations communes, comme l'addition, la soustraction, &c. C'est dequoy je traitte dans le cinquiéme Livre.

Enfin l'addition & la soustraction imparfaite des incommensurables forment une nouvelle es-

pece de nombres complexes qu'on appelle *Polynomes*, dont je traitte dans le ſixiéme Livre.

J'ay comparé en divers endroits ces operations l'une avec l'autre, & j'ay tâché d'en faire connoître exactement la nature & l'uſage. Ceux qui ne veulent que la pratique pourront omettre ces reflexions, & lire ſimplement les Chapitres ſuivans. Livre 1. Chap. 2. 5. 6. 7. 8. 9. 10. Liv. 2. Chap. 1. 2. 3. 4. 5. & 7. Liv. 3. Chap. 1. 4. 8. 9. 10. 11. 12. Aprés quoy ſi l'on veut laiſſer les incommenſurables, on peut paſſer à la ſeconde partie; & lire ſeulement les Chap. 2. 3. 4. 5. & 6. de la preparation des équations, & enfin les deux ou trois premiers Chapitres de la troiſiéme partie, qui ne ſuppoſent au plus que l'extraction de la racine quarrée & de la racine cubique.



TABLE DES CHAPITRES.

PREMIERE PARTIE.

Du Calcul Arithmetique & Litteral.

LIVRE PREMIER.

Des quatre premieres operations sur les Nombres, L'Addition, la Soustraction, la Multiplication & la Division.

LIVRE SECOND.

Des quatre Operations sur les Nombres complexes.

LIVRE TROISIE'ME.

Des Fractions.

LIVRE IV.

De la Formation & de la Resolution des Puissances.

Ou

De l'Extraction des Racines.

LIVRE V.

Des Incommensurables.

LIVRE VI.

Des Polynomes.

SECONDE PARTIE.

De la Formation & de la Preparation des Equations.

TROISIE'ME PARTIE.

De la Resolution des Equations.

TABLE DES CHAPITRES.



NOUVEAUX ELEMENS D'ARITHMETIQUE ET D'ALGEBRE.

PREMIERE PARTIE.

Du Calcul Arithmetique & Litteral.

LIVRE PREMIER.

Des quatre premieres operations sur les Nombres,

L'Addition, la Soustraction, la Multiplication & la Division.

CHAPITRE I.

Ce que c'est que l'Unité & les Nombres.



Orsque l'on considere quelque chose, ou comme seule de son espece, ou comme separée de toutes les autres de même espece, & qu'on la considere com-

une indivisible, ou du moins sans faire attention à ses parties, on se sert du mot *un* ou *une* pour exprimer l'idée qu'on a de cette chose, considerée d'une telle maniere; ainsi l'on dit, un soleil, une terre, un homme, un arbre, un son, &c.

Lorsque l'on considere plusieurs choses de même genre ou de même espece, comme parfaitement semblables, ou du moins sans faire attention à leur difference, & faisant ensemble un même tout, on se sert des mots qu'on appelle *Nombres*, pour exprimer l'idée qu'on a de ces choses considerées de cette maniere. Ainsi l'on se sert des mots, deux, trois, &c. pour exprimer d'une maniere determinée l'idée qu'on a de plusieurs hommes, plusieurs étoiles, plusieurs arbres, plusieurs sons, &c.

Lors qu'on ne fait aucune attention à cette chose, ou à ces choses en particulier, mais seulement à la maniere de les considerer; on a l'idée abstraite de l'unité & des nombres.

Ainsi l'unité est une maniere de concevoir chaque chose, comme n'ayant point de parties.

Les nombres sont des manieres de concevoir plusieurs choses, comme parties égales & semblables d'un même tout.

Et parce que chaque partie est elle-même considerée comme l'unité, les nombres sont aussi une multitude d'unitez.

Cette maniere abstraite de considerer l'unité & les nombres peut s'appliquer également à toute sorte de choses.

CHAPITRE II.

De l'expression des Nombres.

IL y a deux manieres ordinaires d'exprimer les idées que nous avons des nombres ; on les exprime par des mots, on les exprime aussi plus simplement par certains caracteres qu'on appelle *chifres*.

Les hommes liez ensemble par la societé civile, & par le commerce, se sont trouvez obligez de se faire connoître les uns aux autres d'une maniere courte & facile, non seulement l'espece de chaque chose, mais encor le nombre des choses de même espece ; & il y a apparence que ces mots qui expriment les nombres n'ont été d'abord inventez que pour répondre à la question *combien*, ou pour la prevenir. Or je remarque qu'on peut faire trois sortes de réponse à cette question. Car si l'on demande, par exemple, combien il y

a d'arbres dans un jardin, on peut répondre, ou qu'il n'y en a point, ou qu'il n'y en a qu'un, ou enfin qu'il y en a un tel nombre, & suivant cette idée on voit que le *point*, s'il m'est permis de me servir de ce terme, est un nombre impropre. Il est nombre en ce qu'il répond à la question combien, il est nombre impropre en ce qu'il ne répond qu'indirectement & negativement. C'est ce qu'on appelle *zero*, en terme d'Arithmetique. Ce zero ou point Arithmetique est le terme negatif d'où commencent les nombres, de même que le point Geometrique est le terme negatif d'où commence l'étenduë. L'unité est le premier des nombres positifs, & elle fait un espece de nombre à part, tous les autres nombres ne sont que l'unité repetée & ajoûtée à elle même; & parce qu'on peut l'ajoûter continuellement à l'infini, il est évident que la suite des nombres est infinie.

Si on vouloit donc exprimer chaque nombre par un mot ou par un caractere primitif, il faudroit étudier toute sa vie pour apprendre à conter & à chifrer depuis l'unité jusques à un nombre fort mediocre, comme par exemple jusques à cinquante mille; & on ne pourroit jamais conter jusques à un million.

Mais on a trouvé dans toutes les Langues un moyen si facile, qu'en repetant cinq ou six fois tres peu de mots & tres peu de chifres, on exprime tous les plus grands nombres dont on puisse avoir besoin dans la Pratique : ce qui paroît surprenant, c'est que toutes les Nations se soient accordées à choisir le même expedient. J'expliqueray en quoy il consiste, en expliquant la Table suivante.

Table de l'expression des Nombres.

zero,	0	dix,	10
un,	1	vingt,	20
deux,	2	trente,	30
trois,	3	quarante,	40
quatre,	4	cinquante,	50
cinq,	5	soixante,	60
six,	6	septante,	70
sept,	7	huitante,	80
huit,	8	nonante,	90
neuf,	9	cent,	100
		mille,	1000.
		million,	1000000

Explication de la Table.

Cette Table contient deux colomnes; dans la premiere on voit comment on exprime les dix premiers nombres par

dix mots ; zero, un, deux, &c. & par dix caracteres 0, 1, 2, &c. ces nombres & ces caracteres s'appellent des unitez. L'unité ajoûtée à elle même fait *deux*, & l'unité ajoûtée à *deux* fait *trois*, &c. Dans la seconde colomne on voit comment on exprime les dixaines ; une dixaine s'appelle dix, & s'exprime par ces deux chiffres ; 10. deux dixaines s'appellent *vingt*, & s'expriment par ces deux chifres, 20 &c. en sorte que ces caracteres 1, 2, 3, &c. étant à la seconde place de droite à gauche, valent dix fois plus que s'ils étoient seuls, ou à la premiere place.

Les nombres compris entre chaque dixaine s'expriment par le mot & le chifre propre de leur dixaine, & par le mot & le chifre propre des unitez dont ils surpassent la dixaine. Ainsi les nombres entre vingt, & trente, s'expriment par vingt-un, 21 ; vingt-deux, 22 ; vingt-trois, 23, &c. vingt-neuf ; 29.

Mais les six premiers entre dix & vingt, s'expriment par des mots particulieres, & au lieu de dire dix-un, dix-deux, &c. dix-six ; on dit onze, douze, treize, quatorze, quinze, & seize, & on continue suivant la Regle generale par dix-sept, dix-huit, dix-neuf, ils s'expri-

ment tous uniformément en chifres ; onze ; 11. douze ; 12 &c. Dans la deuxiéme colomne il y a trois mots, *cent*, qui s'exprime par trois chifres 100. & qui vaut dix dixaines.

Mille, qui s'exprime par quatre chifres ; 1000. & qui vaut dix centaines, ou dix fois cent.

Million, qui s'exprime par sept chifres ; 1000000. & qui vaut mille fois mille.

Les nombres compris entre cent & mille s'expriment pour ainsi dire à trois fois, la premiere on exprime le nombre des centaines, la seconde on exprime le nombre des dixaines, la troisiéme on exprime les unitez : & ils s'expriment aussi par trois chifres, dont le premier de gauche à droite marque le nombre des centaines, le second marque le nombre des dixaines, le troisiéme marque le nombre des unitez ; & lors qu'il n'y a point de dixaines ou d'unitez on les supprime en parlant, & on met des zeros à leur place en écrivant. Ainsi l'on exprime aprés cent ; cent-un ; 101. cent-deux ; 102 &c. cent-dix ; 110. cent-onze ; 111. cent-douze ; 112, &c. cent-vingt ; 120, &c. cent trente-sept ; 137. deux cens ; 200. quatre cens huit ; 408.

cinq cens quarante-trois ; 543.

Les nombres compris entre mille & un million, s'expriment pour ainsi dire à deux reprises, dont chacune s'exprime generalement parlant à trois fois ; la premiere reprise exprime les centaines, les dixaines & le nombre des mille ; la seconde reprise exprime les centaines, les dixaines & les nombres des unitez. Ils s'expriment aussi par six ou cinq, ou quatre chifres, qui se divisent en deux tranches, dont la premiere comprend les trois premiers chifres de droite à gauche, & la seconde comprend le reste des chifres; & dans chaque reprise on supprime en parlant les centaines, les dixaines & les nombres qui manquent, ou la derniere reprise toute entiere si elle manque, & on met des zeros à leur place en écrivant. Ainsi on exprime aprés mille, mille-un 1001. mille-deux 1002 &c. mille-dix 1010. mille dix-neuf; 1019 &c. deux mille 2000. trois mille deux cens; 3200. cinq cens quarante-trois mille, sept cens soixante cinq 543. 765.

Les nombres compris entre un million & mille millions, s'expriment à trois reprises, dont chacune s'exprime generalement parlant à trois fois ; la premiere reprise exprime les centaines, les dixaines

& les nombres des millions; la seconde exprime les centaines, les dixaines & les nombres des mille; la troisiéme exprime les centaines, les dixaines & les nombres des unitez. Ainsi on exprime aprés un million, la suite des nombres par un million-un; 1000. 001. un million-deux; 1000. 002. &c. & neuf cens nonante-neuf millions, neuf cens nonante-neuf mille, neuf cens nonante-neuf. 999. 999. 999. est le plus grand nombre qu'on puisse exprimer regulierement en François, sans employer que les termes receus. On se contente d'exprimer en chifres les nombres au dessus: si on veut pourtant se servir des mots introduits depuis peu parmi les Arithmeticiens, les voicy.

Mille millions s'appelle un milliard, ou plûtôt un billion; 1000. 000. 000.

Mille billions s'appelle un trillion; 1000. 000. 000. 000.

Mille trillions s'appelle un quatrillion; 1000. 000. 000. 000. 000.

Et ainsi de suite par quintillions, sextillions, septillions, octillions &c. & les nombres compris entre chaque nouveau nom, s'exprimeront par une reprise de plus, & chaque reprise à trois fois par centaines, dixaines & nombres, com-

me cy-dessus en supprimant &c.

Pour conter commodément un grand nombre de choses, il faut les conter une à une jusques à dix, & ensuite les conter dix à dix jusques à cent; & ensuite cent à cent jusques à mille, & mille à mille jusques aux dixaines de mille &c. & marquer à chaque fois ce qui reste en les contant dix à dix, comme étant des unitez; & ce qui reste en les contant cent à cent, comme étant des dixaines; & ce qui reste en les contant mille à mille, comme étant des centaines &c. & on trouvera à la fin le nombre cherché exprimé par des mots & par des chifres propres.

On se formera de même facilement l'idée de tout nombre exprimé par des mots ou par des chifres; en arrangeant ses idées dans le même ordre, & on pourra s'en former une image distincte par l'application aux choses sensibles. Car par exemple on imagine distinctement dix doigts ou moins, on imagine distinctement dix hommes ou moins, on imagine distinctement dix chambres ou moins, dans chacune desquelles il y ait le même nombre d'hommes; sçavoir dix ou moins; on imagine distinctement dix maisons, dans chacune desquelles il y ait dix chambres

ou moins en même nombre ; on imagine distinctement dix ruës, dix quartiers, dix Villes &c. donc en ne poussant pas la chose plus loin, on peut imaginer distinctement tous les nombres depuis l'unité jusques à dix millions.

On exprimera par des mots la valeur de tout nombre exprimé par des chifres, en divisant ces chifres de trois en trois de droite à gauche, & commençant par nombres, dixaines, centaines d'unitez, puis par nombres, dixaines, centaines de mille, puis par nombres, dixaines, centaines de millions &c. jusques à ce qu'on ait trouvé la valeur du premier chifre à gauche; & alors commençant l'expression par celuy-là, on dit tout de suite la valeur des trois chifres de chaque tranche, & on ajoûte son nom particulier, de million, de mille, ou d'unitez, en supprimant toutes les expressions où il y a des zeros.

Exemple, 35 | 873 s'exprime trente-cinq mille, huit cens septante-trois.

503 | 600 | 708 s'exprime cinq cens trois millions, six cens mille sept cens huit, & 7|000|501 s'exprime sept millions cinq cens-un.

Au contraire pour exprimer par chifres la valeur de tout nombre exprimé par des mots, on commence par écrire les chi-

fres de gauche à droite & par le plus grand nombre. On exprime par exemple les centaines, puis les dixaines, puis le nombre des millions; ensuite on exprime les centaines, puis les dixaines, puis le nombre des mille &c. & on met des zeros à la place des tranches que l'on omet, ou des parties de ces tranches qui ne sont pas exprimées.

Ainsi pour exprimer en chifres ce nombre, trente mille deux cens sept, j'écris 30207. & pour exprimer deux cens cinquante-quatre mille, trois cens trente-huit; j'écris 254338. un peu d'usage apprendra le reste, & il suffit de savoir conter & chifrer jusques à deux cens pour conter & chifrer à l'infini.

Chapitre III.

Des differentes expressions des mêmes Nombres.

POur exprimer sept dixaines, huit dixaines, neuf dixaines, on dit en calculant septante, huitante, nonante; hors du calcul on dit & on écrit soixante-dix, quatre-vingts, quatre-vingts-dix.

Et les nombres d'entre deux s'expriment

par ſoixante-onze, ſoixante-douze &c. ſoixante dix-neuf; quatre-vingts-un, quatre-vingts-deux, &c. quatre-vingts-onze, quatre-vingts-douze &c. quatre-vingts-dix-neuf.

Au lieu de cent-vingt on dit ſix-vingt, mais on continue ſuivant la Regle par cent vingt-un, cent vingt-deux &c.

On dit auſſi onze cens, douze cens &c. onze mille, douze mille &c. mais en matiere de Chronologie on dit l'an mil-deux cens &c. mil-ſix-cens, ſuivant la Regle.

La raiſon de cette irregularité peut être attribuée vray ſemblablement à l'agrément de la prononciation que l'on trouve plus douce dans ce mot, par exemple, ſoixante-dix que dans ſeptante, à cauſe des deux conſonnes *p t*, que nôtre Langue évite, & par la même raiſon on a mieux aimé dire, quatre-vingts qu'*octante*, comme on diſoit autrefois à cauſe des deux conſonnes *c t*, & *octante* a peut-être fait auſſi rejetter huitante, quoique ce dernier mot n'ait rien de rude; & comme on a dit ſoixante-dix, ſoixante-onze, on a voulu dire auſſi quatre-vingts-dix, quatre-vingts-onze pour conſerver l'Analogie., peut-être auſſi a-t-on cru mieux concevoir ce que c'eſt que dix

ajoûté à soixante, que ce que c'est que sept fois dix; & ce que c'est que quatre fois vingt, que ce que c'est que huit fois dix. Quoy qu'il en soit les Arithmeticiens ont eu raison de retenir les mots de septante, huitante, nonante, parce qu'outre que cette expression est plus courte, plus reglée & plus uniforme, ces mots reveillent naturellement l'idée de sept, de huit & de neuf dixaines, & qu'ainsi on est porté à écrire ou à retenir les chifres 7, 8 & 9 qui les expriment, au lieu qu'en disant soixante-dix, quatre-vingts, quatre-vingts-dix, on est porté à écrire ou à retenir les chifres 6 & 4, ce qui est une occasion d'erreur.

Pour *six-vingts* c'est la même raison que pour quatre-vingts.

Pour onze cens, douze cens &c. c'est une suite de la premiere irregularité, onze, douze &c. & il y a apparence qu'on a formé ces mots propres pour les six premiers nombres au dessus de dix, à cause du grand usage dont ils sont dans les poids, les mesures, & les monnoyes. Puisque j'en suis sur la Grammaire j'ajoûteray qu'on prononce dix-sept, dix-huit, dix-neuf, vingt-un, vingt-deux &c. vingt-neuf, comme s'il y avoit un *e* muet entre-deux, & comme si on écri-

voit dize-sept, vingte-un &c. & qu'au contraire lorsque les nombres des dixaines se terminent par un *e* muet, comme trente, quarante, &c. on prononce comme s'il y avoit un *&* entre ces deux mots, lorsque le dernier est, un, dix, onze &c. dix-neuf, & comme si on écrivoit trent'& un, soixant'& dix, soixant' & onze &c. Mais on prononce comme on écrit trente-deux, trente-trois &c. trente-neuf. On prononce aussi quatre-vingts-un, quatre-vingts-onze, comme si on écrivoit quatrevin-un, quatrevin-onze; mais on écrit & on prononce quatre-vingts ans, parce que vingt se decline & suit la Regle des pluriers, comme *cent* & million avec ses composez: tous les autres sont indeclinables.

CHAPITRE IV.

Que cette maniere d'expression n'est pas purement arbitraire, mais qu'elle est fondée en raison & sur la nature; & qu'en y faisant tres peu de changemens, elle seroit la plus parfaite qu'il fût possible.

DE quelque Methode qu'on se serve, on ne peut conter ni chifrer à l'in-

fini sans employer ou une infinité de mots & de chifres differens, ou une infinité de fois le même mot & le même chifre : mais la plus parfaite de toutes les Methodes, est celle qui pour exprimer le même nombre employe le moins de mots & de chifres qu'il est possible ; qui les employe d'une maniere reglée & uniforme, & qui ne suppose ni trop ni trop peu d'étenduë de memoire & d'imagination. Cela supposé, je croy pouvoir demontrer que la Methode dont on se sert est la plus parfaite qu'il soit possible. Car premierement il est évident qu'on ne peut se passer de progression, c'est à dire d'une repetition suivant un certain nombre, comme de dix en dix, de cent en cent, &c. parce qu'autrement il faudroit un mot & un chifre nouveau pour chaque nombre, ce qui est impraticable. 2°. Puis qu'on peut exprimer tous les nombres par une seule progression, il seroit inutile & contre l'ordre d'en employer plusieurs, en quoy nôtre expression en chifres l'emporte sur celle des Hebreux, des Grecs & des Romains. 3°. Entre toutes les progressions il n'y a que celle de dix en dix qui soit fondée sur la nature & en raison. Car comme tous les hommes se sont naturellement ser-

vis de certaines parties de leurs corps, pour mesurer les longueurs & les largeurs; que c'est de là que sont venuës les mesures par pieds, pouces, coudées, brasses, aulnes, &c. ils ont été de même portez à conter sur leur doigts jusques à dix, & à recommencer ensuite jusques à la seconde dixaine, & ainsi de suite.

La main est de toutes les parties du corps la plus propre à conter, comme ayant le plus de parties sensibles, mobiles & exposées distinctement à la vuë. C'est ainsi que le pied est la mesure la plus naturelle des distances sur la terre, & le bras la mesure la plus naturelle de la longueur des corps flexibles qui peuvent y être appliquez.

D'ailleurs si l'on prenoit une autre progression, ou elle seroit plus grande que la progression decuple, ou elle seroit plus petite. Si elle étoit plus grande, comme par exemple de cent en cent, il faudroit se charger la memoire de cent termes, & de cent chifres primitifs au lieu de dix, & à proportion que la progression seroit plus grande, il faudroit apprendre un plus grand nombre de mots & de chifres, ce qui est déja un inconvenient; mais parce qu'on pourroit répondre que d'un

autre côté on auroit l'avantage d'exprimer de plus grands nombres par moins de mots & moins de chifres, j'ajoûte que dans cette supposition il faudroit savoir par cœur toutes les operations qu'on peut faire sur deux nombres plus petits que cent, de même que dans l'hypothese ordinaire on suppose qu'on sache ajoûter par cœur tout nombre plus petit que dix, à tout nombre plus petit que dix; & multiplier tout nombre plus petit que dix, par tout nombre plus petit que dix : or il est ridicule de supposer qu'on sache multiplier par cœur 67 par 58, comme nous supposons que l'on sache multiplier sept par cinq.

Si au contraire on se servoit uniquement ou de la repetition du mot un, & du chifre 1. ou si l'on prenoit une progression beaucoup moindre que la decuple, il faudroit repeter trop souvent les mêmes mots & les mêmes chifres, & on ne pourroit de cette maniere conter commodément que de tres petits nombres. On ne tireroit même aucun avantage de ces petites progressions; quoique les operations par cœur en fussent plus aisées, parceque d'un autre côté il en faudroit faire beaucoup plus. En un mot, comme tous les hommes sont portez à conter

sur leur doigts, les intervalles d'un terme de la progression à l'autre, on auroit pour ainsi dire des doigts de reste, en prenant une progression plus petite que la decuple, & on n'en auroit pas assez si on prenoit une progression plus grande; dans le premier cas on suppose trop peu d'étenduë de memoire & d'imagination; dans le second on en suppose trop & sans secours du côté des sens. Enfin toutes les autres progressions seroient purement arbitraires, la progression decuple est la seule qui soit naturelle, & l'usage en est tellement établi qu'il seroit inutile d'en proposer une autre.

Il n'y a rien du tout à changer dans l'expression en chifres, si ce n'est peut-être la forme des caracteres qui pourroit être plus simple, comme si c'étoit de simples traits, ou des points arrangez differemment.

Pour l'expression verbale il y auroit quatre choses à changer. 1°. Que les noms des dix premiers nombres fussent monosyllabes, & les syllabes les plus simples qu'il fût possible. 2°. Qu'au lieu des six mots onze, douze &c. seize, on dît dix-un, dix-deux &c. 3°. Qu'au lieu de vingt trente, quarante &c. on dît deux dix, trois dix &c. comme l'on dit deux

cens, trois cens, deux mille, trois mille, deux millions, trois millions. 4°. Comme on a évité la repetition du même mot tout de suite, & que c'est pour cela qu'aprés dix-neuf au lieu de dire dix-dix, par addition on a formé le mot de *vingt*, & qu'aprés nonante-neuf, au lieu de dire dix-dix par multiplication on a formé un nouveau mot *cent*, on ne devoit point avoir formé de nouveau mot pour dix fois cent qui est mille, comme on n'en a point formé pour dix mille, pour dix millions &c. mais suivant la même analogie, comme pour dix fois dix on a formé un nouveau mot *cent*, & pour mille fois mille un nouveau mot *million*, on ne devoit former un nouveau mot, que pour cent fois cent qui répondroit à nôtre dix mille, & un autre nouveau mot pour mille fois mille, qui répondroit à nos cent millions; & ainsi de suite. De cette maniere il auroit fallu incomparablement moins de mots, la Methode auroit été parfaitement uniforme, & au lieu de diviser les chifres de trois en trois en progression Arithmetique, il auroit fallu les diviser suivant cette progression Geometrique 1. 2. 4. 8. 16, &c. mais comme ces reflexions ne peuvent pas être reduites en pratique, je ne m'y ar-

rêteray pas davantage. Je croy en avoir assez dit pour expliquer à fonds l'expression des nombres, ce qui me semble n'avoir pas encore été fait.

Chapitre V.

De l'expression en Lettres.

LEs nombres particuliers & connus comme deux, trois &c. s'expriment comme nous avons dit par des chifres, & c'est l'objet de l'Arithmetique pratique; mais outre ces nombres il y en a que j'appelle *nombres donnez*, & d'autres que j'appelle *nombres inconnus*, selon qu'ils expriment les rapports des quantitez données ou inconnuës; ce qui s'entendra mieux par cet exemple, soit le triangle A B C, donné, c'est à dire tracé actuellement sur le papier ou sur le terrain, & par consequent ses trois côtez, c'est à dire les trois lignes A B, B C, C A, sont aussi données, mais elles ne

sont pas connuës, parce qu'on ne sait pas le rapport qu'elles ont en nombres; on ne sait pas combien de fois chacune contient, par exemple leur commune mesure E, & on ne peut sçavoir ce rapport que par une experience methodique, en soustrayant la plus petite de l'une des deux plus grandes, & soustrayant le reste de la plus petite, & le second reste du premier reste, & le troisiéme reste du second; & ainsi de suite jusques à ce qu'on trouve un reste qui mesure juste le reste precedent: il se peut faire même qu'on ne trouve point, ou qu'il n'y ait point de tel reste, & en ce cas ces lignes sont données & ne peuvent être connuës.

La maniere de mesurer ces lignes sur le terrain par l'application d'une toise, des pieds & des pouces, & de les mesurer sur le papier par une échelle, est commode pour la pratique; mais elle est Mecanique & point du tout Geometrique.

Je suppose qu'on veuille savoir en general & en nombres la longueur d'une perpendiculaire BD, qui tombe d'un point B, sur le côté opposé AB, dans un triangle donné. Et comme tout triangle donné peut être representé par le triangle ABC, si j'exprime les trois li-

gnes AB, BC, CA, par des nombres particuliers & connus, comme si je suppose que AB soit de 15, BC, de 13, & CA de 14, & que suivant cette supposition je cherche la longueur de la perpendiculaire BD, la Geometrie & l'Algebre me fourniront une resolution particuliere, & je trouveray que BD est de 12, mais pour avoir une resolution generale, & qui convienne également à tous les cas possibles, il faut qu'au lieu des nombres particuliers 13. 14. & 15. je me serve d'une expression generale, & il est impossible d'en trouver de plus simple, de plus familiere, de plus commode que l'expression arbitraire des lettres de l'Alphabet, ainsi j'appelleray par trois lettres les trois lignes données, j'appelleray AB, *a*, & BC, je l'appelleray *b*, & CA, je l'appelleray *c*, c'est à dire que ces trois lettres *a*, *b*, *c*, me representeront generalement & indistinctement tous les nombres possibles avec cette seule restriction, que les deux joints ensemble soient plus grands que le troisiéme, parce que les deux côtez d'un triangle sont toûjours, étant pris ensemble plus grands que le troisiéme.

La perpendiculaire BD est inconnuë, & je l'appelle *x*; & cette lettre me re-

presente généralement tous les nombres qui ont le même rapport aux trois nombres A, B, C, que la perpendiculaire a aux côtez representez par ces nombres.

La Geometrie & l'Algebre me fourniront une resolution generale, c'est à dire la valeur d'x, exprimée par les trois lettres A, B, C.

Mais parce qu'il est important de distinguer dans les operations les nombres donnez d'avec les nombres inconnus, j'exprimeray les nombres donnez par les onze premieres lettres de l'Alphabet, a, b, c, d, e, f, g, h, i, l, m, & les nombres inconnus par les onze dernieres, n, o, p, q, r, s, t, u, x, y, z.

Il arrive rarement qu'on ait besoin d'exprimer une si grande quantité de nombres, s'il en falloit exprimer davantage on se serviroit d'autres caracteres ou d'autres Alphabets à discretion.

Ces nombres donnez & inconnus exprimez par des lettres sont proprement l'objet de l'Algebre : ces lettres ne representent pas directement les quantitez données, mais les rapports en nombre de ces quantitez. A represente le rapport de la ligne AB à la ligne E, unité réelle ou supposée, ce sont ces rapports qu'on multiplie & qu'on divise tant qu'on veut

veut à l'infini les uns par les autres, ce qui ne se peut dire sans absurdité des lignes mêmes, ou des autres especes de quantité de même, ou de different genre. Ainsi l'objet de l'Algebre n'est point la grandeur, ou la quantité en general; mais les nombres donnez & inconnus, en tant que ceux-cy peuvent avoir un rapport connu aux nombres donnez.

Chapitre VI.

De l'Addition.

Definition de l'Addition.

L'Addition est une Methode d'exprimer le plus simplement qu'il est possible, la somme de deux ou plusieurs nombres.

Proposition premiere.

Ajoûter deux nombres connus, & exprimez par des chifres.

On suppose qu'on sache ajoûter par cœur tout nombre plus petit que dix, à tout nombre plus petit que dix, & en exprimer la somme en chifres, que si l'on ne veut rien supposer, voicy une Table qui marque ces additions toutes faites.

TABLE D'ADDITION.

2 & 2	ſont	4
2 & 3	ſont	5
2 & 4	ſont	6
2 & 5	ſont	7
2 & 6	ſont	8
2 & 7	ſont	9
2 & 8	ſont	10
2 & 9	ſont	11
3 & 3	ſont	6
3 & 4	ſont	7
3 & 5	ſont	8
3 & 6	ſont	9
3 & 7	ſont	10
3 & 8	ſont	11
3 & 9	ſont	12
4 & 4	ſont	8
4 & 5	ſont	9
4 & 6	ſont	10
4 & 7	ſont	11
4 & 8	ſont	12
4 & 9	ſont	13
5 & 5	ſont	10
5 & 6	ſont	11
5 & 7	ſont	12
5 & 8	ſont	13
5 & 9	ſont	14
6 & 6	ſont	12
6 & 7	ſont	13
6 & 8	ſont	14
6 & 9	ſont	15
7 & 7	ſont	14
7 & 8	ſont	15
7 & 9	ſont	16
8 & 8	ſont	16
8 & 9	ſont	17
9 & 9	ſont	18

C'eſt la même choſe d'ajoûter 6 à 3, que d'ajoûter 3 à 6. mais l'ordre veut qu'on ajoûte, ou un nombre égal à un

nombre égal, ou un plus petit nombre à un plus grand, & le grand nombre est proprement le nombre auquel on ajoûte, & le petit nombre est le nombre à ajoûter.

Premier Exemple.

Il faut ajoûter 327 à 432. j'écris le petit nombre sous le plus grand, les unitez sous les unitez, les dixaines sous les dixaines, &c.

432
327
759

Et je dis en commençant par les unitez 2 & 7, ou 7 & 2 font 9; j'écris 9 au rang des unitez.

Je passe ensuite aux dixaines, & je dis 3 & 2 font 5; j'écris 5 au rang des dixaines.

Enfin je viens aux centaines & je dis 4 & 3 font 7; j'écris 7 au rang des centaines, & la somme est 759.

Second Exemple.

Il faut ajoûter 878 à 5482. j'écris 878 sous 5482, les unitez sous les unitez &c. & je dis en commençant par les unitez 2 & 8, ou 8 & 2 font 10. & parce que 10 ne peut s'exprimer que par deux chifres, j'écris le dernier qui est 0, au rang des unitez, & je retiens 1. pour les di-

5482
878
6360

xaines, ausquelles je passe, & je dis 1 dixaine que j'ay retenuë & 8 font 9; & 9 & 7 font 16. j'écris par la même raison 6 au rang des dixaines, & je retiens 1. pour les centaines ausquelles je passe; & je dis 1 centaine que j'ay retenuë, & 4 ou simplement 1 & 4 font 5; & 5 & 8 font 13; j'écris 3 au rang des centaines, & je retiens 1. pour les mille, ausquels je passe, & je dis 1 & 5 font 6; j'écris 6 au rang des mille, la somme est 6360.

Troisiéme Exemple.

Il faut ajoûter 570300 à 836070. j'écris 570300 sous 836070. & je dis en commençant par les unitez, 0 & 0 font 0, car il est évident que rien ajoûté à rien, fait pour ainsi dire un autre rien; j'écris 0, au rang des unitez, & passant aux dixaines, je dis 7 & 0 font 7. car il est évident que zero ou rien ajoûté à un nombre, ne l'augmente point; j'écris 7 & je passe au rang des centaines, & je dis 0 & 3 font 3; j'écris 3. & continuant je dis 6 & 0 font 6; j'écris 6. puis 3 & 7, ou 7 & 3 font 10; j'écris un 0, & je retiens 1. enfin 1 que j'ay retenu & 8 font 9, & 5 font

836070
570300
1406370

14, & comme il ne reste plus rien à ajoûter, j'écris les deux chifres 14. & la somme est 1406370.

De l'Addition reïterée.

LOrs qu'on a plus de deux nombres à ajoûter, c'est une Addition reïterée. On suppose qu'on sache ajoûter tout nombre plus petit que dix à tout nombre connu, & en exprimer la somme: qu'on sache; par exemple que 9 ajoûté à 45 fait 54, & 7 ajoûté à 55 fait 62.

Que si l'on ne veut rien supposer, il faut conter sur ses doigts, par exemple 9 unitez depuis 45, jusques à 54, ou 7 unitez depuis 55 jusques à 62. Car on n'y peut pas suppléer par une Table.

Premier Exemple.

Il faut ajoûter ces trois nombres 87084, 37300, 8307. je les écris l'un sous l'autre, les unitez sous les unitez, les dixaines sous les dixaines, &c. &

	87084
	37300
	8307
somme	132691

commençant par les unitez, je dis 4 & 0 font 4, & 7 font 11, ou simplement pour abbreger omettant tous les zeros qui ne changent rien à la somme, je dis 4 & 7 font 11; j'écris 1. & je retiens 1. & pas-

sant aux dixaines, je dis 1 & 8 font 9. j'écris 9.

Ensuite je dis 3 & 3 font 6, j'écris 6. Puis 7 & 7 font 14, & 8 font 22, j'écris 2 & je retiens 2. Enfin 2 & 8 font 10, & 3 font 13. j'écris 13. & la somme cherchée est 132691.

Second Exemple.

Il faut ajoûter ces quatre nombres 578, 407, 93, 88.

Je les écris l'un sous l'autre &c.	578
le plus petit nombre sous celuy	407
qui est immediatement plus grand,	93
du moins ceux qui ont moins	88
de chifres, sous ceux qui en ont	——
plus, & operant comme cy-des-	1166

sus, je trouve que la somme est 1166.

Si l'on avoit une trop grande quantité de nombres à ajoûter, par exemple si l'on avoit quarante nombres, on peut partager l'operation, & faire par exemple quatre sommes partiales de dix nombres chacune, & la somme de ces quatre sommes partiales qu'on ajoûteroit à part, donneroit la somme totale cherchée. L'ordre veut qu'on n'ajoûte pas à la fois plus de dix nombres; afin de n'avoir jamais qu'un chifre à retenir dans tous les rangs.

REGLE GENERALE POUR L'ADDITION.

IL faut diſpoſer les nombres à ajoûter de telle ſorte, que les unitez ſoient ſous les unitez, les dixaines ſous les dixaines, les mille ſous les mille, les dixaines de mille ſous les dixaines de mille &c. & pour un plus grand ordre, les nombres qui ont moins de chifres, ſous ceux qui en ont plus.

Aprés cela il faut commencer par ajoûter les unitez, & ſi la ſomme des unitez peut être exprimée par un ſeul chifre, on écrit ce chifre au rang des unitez ; & on paſſe aux dixaines. Mais ſi cette ſomme s'exprime par deux chifres : on écrit le dernier au rang des unitez, & on retient le premier pour l'ajoûter au rang des dixaines.

On ajoûte de même les rangs des dixaines en retenant pour les centaines, ſi la ſomme eſt exprimée par deux chifres ; & ainſi de ſuite juſques au dernier rang, où l'on écrit la ſomme telle qu'elle eſt ſans rien retenir.

On ne fait aucune attention aux zeros, ſi ce n'eſt que la ſomme de pluſieurs zeros eſt zero & s'écrit 0.

DEMONSTRATION.

La Demonſtration de cette operation eſt évidente par les Regles de l'expreſſion des nombres. Car en exprimant la ſomme partiale des unitez, & la ſomme partiale des dixaines, & la ſomme partiale des centaines &c. Il eſt évident qu'on exprime la ſomme totale des unitez, des dixaines & des centaines &c. puiſque le tout eſt égal à toutes ſes parties jointes enſemble. Il eſt évident auſſi que l'expreſſion de la ſomme eſt abregée, reglée & uniforme, ce qu'il falloit trouver. Tout l'artifice conſiſte à faire par parties & ſucceſſivement, ce qu'on ne peut pas faire tout d'un coup, & d'une ſeule veuë.

Autres Exemples.

On demande combien d'années il y a depuis la fondation de Rome juſques à l'année courante 1697.

Il eſt prouvé que Rome fut fondée le 21. Avril 753. ans avant l'Ere vulgaire. il n'y a donc qu'à ajoûter 753 à 1697. & la ſomme 2450 ou 2451. depuis le 22 Avril, eſt l'année de la

1697
753
2450

fondation de Rome. On trouvera de même le commencement des Olympiades en ajoûtant 776. à l'Ere vulgaire ; ainsi l'année courante a commencé depuis le Solstice d'été d'être la 2473eme aprés le rétablissement des jeux Olympiques par Iphitus.

	1697
	776
	2473

On demande combien d'années Rome a été sous ses Rois, il n'y a qu'à ajoûter les années des regnes de chaque Roy.

Romulus	38
Numa Pompilius	43
Tullus Hostilius	32
Ancus Martius	24
Tarquinius Priscus	38
Servius Tullus	44
Tarquinius Superbus	25
Somme	244

On demande combien il y a d'années depuis la Creation du Monde jusques au Deluge. Il n'y a qu'à ajoûter les années qu'ont vécu les dix Patriarches, chacun avant la naissance de leur principal fils jusques à Noë, qui avoit 600 ans, lors que le Deluge arriva ; & parce que le texte Hebreu, & celuy de la Vulgate sont

differens du texte des Septante. Voicy le calcul de ces années suivant les deux textes.

Hebr. & Lat.		70 Interpr.
Adam	130	230
Seth	105	205
Enos	90	190
Cainam	70	170
Malaleel	65	165
Jared	162	162
Henoch	65	165
Mathusalem	187	167 pour 187.
Lamech	182	188
Noë	600	600
Somme	1656	2242. pour 2262.

D'où je conclus que le Deluge est arrivé suivant la Vulgate l'année du Monde 1656. & suivant les Septante l'année du Monde 2242. ou plûtôt l'année 2262. comme S. Epiphane & S. Augustin ont lû; parce que si Mathusalem n'avoit eu que 167 ans, lors qu'il eut pour fils Lamech & ayant vécu 969 ans, il auroit survécu 14 ans au Deluge contre ce qui est marqué dans la Genese, qu'il n'y eut que Noë, ses trois enfans & leur quatre femmes qui se sauverent dans l'Arche. Il faut donc lire comme dans la Vulgate 187.

PROPOSITION SECONDE.

Ajoûter *deux Nombres* exprimez par lettres. Ces nombres sont exprimez ou par la même lettre, ou par des lettres differentes.

Dans le premier cas on les ajoûte comme les nombres connus dans la Proposition precedente. Ainsi pour ajoûter *a*, avec *a*, on écrit 2 *a*, & pour ajoûter *a* avec 2 *a* on écrit 3 *a*, & pour ajoûter 2 *a* avec 3 *a* on écrit 5 *a*. Et pour ajoûter 17 *a* à 43 *a* on écrit 40 *a*. Et ainsi des autres.

Cette addition est une addition propre & parfaite, parce que l'on connoît le rapport qu'il y a entre la somme, & les parties qui la composent.

Dans le second cas, lors que les nombres sont exprimez par des lettres differentes; on les ajoûte d'une maniere impropre & imparfaite, en les joignant par ce caractere + qu'on appelle *le signe plus*. Ainsi pour ajoûter *a* avec *b* on écrit *a* + *b*, ce qui signifie *a* plus *b*. Et pour ajoûter 2 *a* avec 3 *b*, on écrit 2 *a* + 3 *b*, ce qui signifie deux *a* plus trois *b*.

On ajoûte de même les nombres exprimez par des chifres, aux nombres exprimez par des lettres. Ainsi pour ajoû-

ter 1, avec *a*, on écrit $a + 1$; & pour ajoûter 2 avec 3 *b*, on écrit $3b + 2$.

Cette addition est une addition impropre & imparfaite, parce que l'on ne connoît pas le rapport de la somme à ses parties.

Cette addition ne serviroit de rien, & on n'en seroit pas plus avancé pour avoir mis le signe + entre deux nombres, dont on ne connoît pas le rapport, mais on la fait ainsi pour pouvoir venir à ce qu'on appelle équation & resoudre la question, comme l'on verra dans la suite.

De l'Addition litterale reïterée.

LOrs qu'on a plus de deux nombres exprimez par lettres, ou exprimez differemment, à ajoûter ensemble, c'est une addition reïterée, & il n'y a point de difficulté nouvelle. Ainsi pour ajoûter $342b$, $200b$, & $73b$; j'écris $615b$; & pour ajoûter $27a$, $18b$, $10c$: j'écris $27a + 18b + 10c$; & pour ajoûter $27a$, $18b$, 13: j'écris $27a + 18b + 13$. & ainsi des autres.

L'Addition simple & reïterée des nombres exprimez en lettres, ou exprimez differemment est un corollaire évident de

l'addition ſimple & reïterée des nombres connus, il n'y a de nouveau que l'expreſſion arbitraire du ſigne +.

CHAPITRE VII.

De la Souſtraction.

Definition de la Souſtraction.

LA Souſtraction eſt une Methode d'exprimer le plus ſimplement qu'il eſt poſſible, la difference de deux nombres; c'eſt à dire l'excez du plus grand ſur le plus petit.

Propoſition premiere.

Deux nombres connus exprimez par des chifres étant donnez, exprimer leur difference.

On ſuppoſe qu'on ſache ſouſtraire par cœur tout nombre plus petit que dix, de tout nombre qui le ſurpaſſe de moins de dix; & qu'on ſache exprimer le reſte. Que ſi l'on ne veut rien ſuppoſer, Voicy une Table qui marque ces Souſtractions toutes faites.

Table de Soustraction.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9									
1		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9								
2			0	1	2	3	4	5	6	7	8	9							
3				0	1	2	3	4	5	6	7	8	9						
4					0	1	2	3	4	5	6	7	8	9					
5						0	1	2	3	4	5	6	7	8	9				
6							0	1	2	3	4	5	6	7	8	9			
7								0	1	2	3	4	5	6	7	8	9		
8									0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
9										0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Pour trouver dans cette Table combien il reste, par exemple en ôtant 7 de 15. je prens 7 dans la premiere colomne perpendiculaire, & je prens dans le rang horisontal qui luy repond, la cellule qui repond à 15, dans le premier rang horizontal : & j'y trouve le nombre 8, qui est le reste cherché, & ainsi des autres.

Premier Exemple.

Il faut soustraire 235 de 348. je les dispose comme dans l'addition mettant le nombre à soustraire, sous le nombre dont on soustrait; & commençant par les unitez je dis de 8 j'ôte 5, il reste 3. j'écris 3 au rang des unitez; ensuite venant aux dixaines, de 4. j'ôte 3. il reste 1, j'écris 1. enfin de 3, j'ôte 2. il reste 1. que j'écris & le reste cherché est 113.

$$\begin{array}{r} 348 \\ 235 \\ \hline 113 \end{array}$$

Second Exemple.

Il faut soustraire 3247 de 5247. je dispose ces deux nombres, comme dans l'exemple precedent; & je dis de 7 j'ôte 7. il reste 0; de 4 j'ôte 4. il reste 0, &c. de 5, j'ôte 3. il reste 2. le reste cherché est 2000.

$$\begin{array}{r} 5247 \\ 3247 \\ \hline 2000 \end{array}$$

Troisiéme Exemple.

Il faut soustraire 237 de 524. je

dispose ces nombres, comme cy-dessus; & je dis de 4. j'ôte 7. je ne puis. J'emprunte 1e. dixaine au rang des dixai-	524 237 ——— 287

nes que je ponctue pour m'en souvenir; or cette dixaine jointe à 4 fait 14. & je dis de 14 ôtant 7. il reste 7. j'écris 7. je viens ensuite au rang des dixaines, & je dis de 1. & non pas de 2. parce que j'ay emprunté 1, de 1. ôtant 8. je ne puis, c'est pourquoy j'emprunte 1, au rang des centaines que je ponctue pour m'en souvenir; & je dis 10 & 1 font 11. dont ôtant 3. il reste 8. que j'écris. Enfin venant aux centaines je dis de 4 ôtant 2. il reste 2. que j'écris, & le reste cherché est 287.

Quatriéme Exemple.

Il faut soustraire 28078 de 38007. je dispose ces nombres comme cy-dessus;

& je dis de 7 ôtant 8. je ne puis, j'emprunte du 8 une unité, qui vaut 1000. mais parce que je n'ay besoin que	38007 28078 ——— 9929

de dix, je ponctue les zeros d'entre deux, & en les faisant valoir 9. c'est comme si je remettois 990. & que je n'empruntasse que 10. je dis donc 10 & 7 font 17. & de 17 ôtant 8. il reste 9. que j'écris. Je dis ensuite dans le rang des dizaines,

zaines, à cause que le zero est ponctué; & qu'il vaut 9. de 9 ôtant 7. il reste 2. que j'écris; & passant aux centaines je dis de 9 ôtant 0, il reste 9. que j'écris; & passant aux mille je dis à cause que le 8 est ponctué, il ne vaut plus que 7. & de 7 ôtant 8. je ne puis. J'emprunte 1. du chifre precedent 3, & je dis 10 & 7. font 17. & de 17 ôtant 8. il reste 9. j'écris 9 au rang des dix mille; & passant ensuite au rang des dix mille, je dis à cause que le 3 est ponctué il ne vaut plus que 2, ainsi de 2 ôtant 2. il reste 0, ou rien, que je n'écris point, parce qu'un zero au commencement d'un chifre ne sert de rien. Le reste cherché est donc 9929.

Regle generale pour la Soustraction.

Disposez les deux nombres comme dans l'addition, le plus petit sous le plus grand. Aprés cela commencez par les unitez; & ôtez les unitez du nombre à soustraire, des unitez du nombre dont on soustrait; & si cette Soustraction se peut faire marquez le reste par le chifre qui luy convient; & passez aux dixaines. Que si cette Soustraction ne se peut pas faire, parce que le nombre des unitez à soustraire est plus grand que le nombre des unitez dont

on soustrait, il faut emprunter 1. au rang des dixaines du nombre dont on soustrait; & ponctuer le chifre dont on emprunte : mais s'il n'y a qu'un zero dans ce rang des dixaines il faut emprunter 1 au rang des centaines, & ponctuer le zero des dixaines, & le chifre des centaines; que s'il n'y avoit encore qu'un zero au rang des centaines, il faudroit emprunter 1. au rang des mille & ponctuer les deux zeros. En un mot il faut emprunter 1. du premier chifre significatif; & ponctuer tous les zeros d'entre deux, par dessus lesquels on saute & les ponctuer pour les faire valoir chacun 9. cet 1. que l'on emprunte vaut toûjours 10. & ajoûtant 10. aux unitez dont on soustrait, il faut ôter de la somme, les unitez à soustraire, & marquer le reste avec le chifre qui luy convient, & passer aux dixaines.

Le nombre des dixaines dont on soustrait est ponctué ou il ne l'est pas, s'il est ponctué il vaut 1. moins que sa valeur naturelle, & si c'est un zero il vaut 9. Otez de même les dixaines des dixaines, & les centaines des centaines, &c. & marquant tous les restes chacun dans son rang vous aurez le reste total, ou la difference cherchée.

DEMONSTRATION.

Cette Regle a deux cas. Le premier lors que le nombre partial à soustraire est plus petit que le nombre partial dont on soustrait, ou lors que ces deux nombres sont égaux. Car pour lors on exprime le reste par le chifre qui luy convient, c'est à dire par un chifre significatif, comme 1. 2. 3. &c. ou par zero. Ce cas n'a aucune difficulté puis qu'il est évident qu'ôtant chaque partie separement de chaque partie, la somme des restes est égale à la difference des deux touts.

Le second cas est lors que le nombre partial à soustraire est plus grand que le nombre partial dont on soustrait ; & ce cas se peut subdiviser en deux. Premierement si le chifre du rang precedent immediatement est un chifre significatif, c'est à dire si c'est 1, 2, 3, &c. & tout autre que le zero, il est évident que l'unité que l'on emprunte vaut 10 fois une unité du rang pour lequel on l'emprunte ; puisque suivant l'expression des nombres ils augmentent en valeur de dix en dix à chaque rang. Et il est évident aussi que puis qu'en continuant l'operation, on a égard à cette unité que l'on a empruntée, cela ne change en rien la verité de

l'operation. Secondement, comme l'unité que l'on emprunte vaut 100. s'il y a un zero entre deux, & qu'elle vaut 1000. s'il y a deux zeros, & qu'elle vaut 10000. s'il y en a trois ; & que cependant on n'a besoin que de dix pour pouvoir soustraire, il est évident qu'il faut remettre le surplus ; c'est à dire ou 90, ou 990, ou 9900. selon le nombre des zeros, & par consequent qu'il faut les faire valoir 9. lors qu'ils sont ponctuez. Comme on a égard dans la suite de l'operation à cet emprunt, il est évident que cela ne change en rien la verité de l'operation, ce qu'il falloit demontrer.

Remarque.

Au lieu d'ajoûter ce 10. que l'on emprunte au nombre dont on soustrait, par exemple à 7 : pour dire ensuite de 17 ôtant 8 il reste 9 ; on peut commencer par ôter 8 de 10. & au reste 2 ajoûtant 7 on trouve le même 9 qu'on écrit pour reste. Cette derniere maniere a quelque chose de plus simple, & on suppose seulement qu'on sache ôter par cœur du nombre dix, tout nombre plus petit que dix : & si l'on ne veut rien supposer, Voicy une Table semblable à celle de l'addition, où l'on trouvera ces Soustractions toutes faites.

TABLE DE LA SOUSTRACTION.

de 10 ôtez 2 reste 8.
de 10 ôtez 3 reste 7.
de 10 ôtez 4 reste 6.
de 10 ôtez 5 reste 5.
de 10 ôtez 6 reste 4.
de 10 ôtez 7 reste 3.
de 10 ôtez 8 reste 2.

---

de 9 ôtez 2 reste 7.
de 9 ôtez 3 reste 6.
de 9 ôtez 4 reste 5.
de 9 ôtez 5 reste 4.
de 9 ôtez 6 reste 3.
de 9 ôtez 7 reste 2.

---

de 8 ôtez 2 reste 6.
de 8 ôtez 3 reste 5.
de 8 ôtez 4 reste 4.
de 8 ôtez 5 reste 3.
de 8 ôtez 6 reste 2.

---

de 7 ôtez 2 reste 5.
de 7 ôtez 3 reste 4.
de 7 ôtez 4 reste 3.
de 7 ôtez 5 reste 2.

---

de 6 ôtez 2 reste 4.
de 6 ôtez 3 reste 3.
de 6 ôtez 4 reste 2.

---

de 5 ôtez 2 reste 3.
de 5 ôtez 3 reste 2.

---

de 4 ôtez 2 reste 2.

Proposition seconde.

DE deux nombres exprimez par lettres, ou exprimez differemment, soustraire le plus petit du plus grand, & marquer leur difference.

Les deux nombres donnez sont exprimez par la même lettre, ou ils sont exprimez differemment.

Dans le premier cas on fait une soustraction propre & parfaite, comme dans la proposition precedente. Ainsi *a*, étant ôté de *a* il reste 0, & *a* ôté de 2 *a*, il reste 1 *a*, & 2 *a* ôtez de 5 *a*, il reste 3 *a*, & 17 *a* ôtez de 40 *a*, il reste 23 *a*.

Dans le second cas on les soustrait par une Soustraction impropre & imparfaite, en mettant entre le nombre dont on soustrait, (lequel on écrit le premier de gau-

che à droite,) & le nombre à soustraire, ce caractere — qu'on appelle le *signe moins*, ainsi pour soustraire *b* de *a* on écrit *a* — *b*, & pour soustraire 2 *a* de 3 *b* on écrit 3 *b* — 2 *a*, & pour soustraire 10 de 2 *a* on écrit 2 *a* — 10 & pour soustraire 2 *a* de 30, on écrit 30 — 2 *a*, ce qui signifie *a* moins *b*; trois *b* moins deux *a*, &c.

La remarque cy-dessus sur la nature, & la difference de l'addition propre & impropre, a lieu aussi dans la Soustraction.

La Soustraction propre suppose toûjours qu'on ôte le plus petit nombre du plus grand; mais dans la Soustraction impropre, comme on ne connoît pas le rapport des nombres exprimez; la Soustraction se fait independemment de cette supposition.

De même que lors qu'on ajoûte plus de deux nombres, c'est une addition reïterée, aussi lors que du même nombre exprimé ou en chifres, ou en lettres, on propose de soustraire successivement divers nombres, c'est une Soustraction reïterée.

Lors qu'on ajoûte successivement, & qu'on soustrait successivement plusieurs nombres, c'est tout ensemble une Addition, & une Soustraction reïterée. Ainsi si l'on

proposé d'ôter b de a, & du reste d'ôter encore c, on écrira $a - b - c$, ce qui n'ayant aucune difficulté, je ne m'arrêteray pas à en donner des exemples.

Chapitre VIII.

De la Multiplication.

Definition de la Multiplication.

La Multiplication est une espece d'Addition, par laquelle on ajoûte à luy-même le nombre à multiplier, autant de fois que le nombre qui le multiplie a d'unitez.

Le nombre qu'on multiplie s'appelle *Nombre à multiplier.*

Le nombre par lequel on multiplie s'appelle le *Multiplicateur.*

Ainsi multiplier 16 par 3. c'est ajoûter 16 trois fois à luy-même ce qui fait 48. 16 est le nombre à multiplier, & 3 est le Multiplicateur.

Lors que les deux nombres donnez sont inégaux, le plus petit est ordinairement pris pour Multiplicateur. Je dis ordinairement, parce qu'il est plus naturel & plus simple d'ajoûter 16 trois

fois

fois à luy-même, que d'ajoûter 3, à luy-même ſeize fois. Mais abſolument parlant on peut prendre pour multiplicateur celuy des deux qu'on veut, & il y a même des cas où il eſt plus commode de prendre le plus grand.

La ſomme du nombre à multiplier ajoûté à luy-même s'appelle *produit*, ainſi 48 eſt le produit de 16 par 3.

La difference eſſentielle de l'addition à la multiplication conſiſte en ce que dans l'addition, on fait abſtraction de l'égalité ou de l'inégalité des nombres qu'on ajoûte; & que dans la multiplication on ſuppoſe tous les nombres à ajoûter égaux.

La multiplication par 2. répond à l'addition ſimple, & la multiplication par tout autre nombre répond à l'addition reïterée; il eſt évident qu'il a fallu inventer une nouvelle operation differente de l'addition reïterée pour multiplier des nombres un peu grands par d'autres grands nombres; car s'il falloit par exemple multiplier 673 par 587, & qu'on voulût ſe ſervir de l'addition reïterée, il faudroit écrire 673 en colomne perpendiculaire 587 fois, ce qui eſt entierement impraticable.

Mais comme le rapport d'égalité eſt

plus ſimple que celuy d'inégalité, l'operation qui ſuppoſe ce premier rapport eſt ſuſceptible d'abbreviation.

Propoſition premiere.

MUltiplier deux nombres exprimez par des chifres, & en exprimer le produit.

On ſuppoſe qu'on ſache multiplier par cœur tout nombre plus petit que dix, par tout nombre plus petit que dix.

Mais parce qu'on peut ſuppoſer avec raiſon que les commençans ne ſavent point par cœur toutes ces multiplications. Voicy une Table où l'on les trouve.

Table de Multiplication.

2 fois 2 font 4	3 fois 3 font 9
2 fois 3 font 6	3 fois 4 font 12
2 fois 4 font 8	3 fois 5 font 15
2 fois 5 font 10	3 fois 6 font 18
2 fois 6 font 12	3 fois 7 font 21
2 fois 7 font 14	3 fois 8 font 24
2 fois 8 font 16	3 fois 9 font 27
2 fois 9 font 18	

4 fois 4 font 16	6 fois 6 font 36
4 fois 5 font 20	6 fois 7 font 42
4 fois 6 font 24	6 fois 8 font 48
4 fois 7 font 28	6 fois 9 font 54
4 fois 8 font 32	
4 fois 9 font 36	7 fois 7 font 49
	7 fois 8 font 56
5 fois 5 font 25	7 fois 9 font 63
5 fois 6 font 30	
5 fois 7 font 35	8 fois 8 font 64
5 fois 8 font 40	8 fois 9 font 72
5 fois 9 font 45	
	9 fois 9 font 81

Premier Exemple.

Il faut multiplier 34 par 2.

Je mets le multiplicateur 2. sous le nombre à multiplier 34. les unitez sous les unitez, &c. Je dis; 2 fois 4 font 8; j'écris 8 sous 4. je dis ensuite 2 fois 3 font 6. j'écris 6 sous 3. & le produit est 68.

```
 34
  2
----
 68 produit
```

Second Exemple.

Il faut multiplier 262 par 5. Je dispose ces nombres comme cy-dessus, & je dis; 5 fois 2 ou 2 fois 5 font 10, j'écris 0, & je retiens 1.

```
 262
   5
-----
1310 produit
```

je dis ensuite 5 fois 6 font 30. & 1 que j'ay retenu font 31. j'écris 1, & je retiens 3. enfin je dis 5 fois 2 font 10, & 3 que j'ay retenu font 13. j'écris 13. le produit est 1310.

Troisiéme Exemple.

Il faut multiplier 678 par 7. je dispose ces nombres comme cy-dessus, & je dis; 7 fois 8 font 56, j'écris 6, & je retiens 5. je dis ensuite 7 fois 7 font 49. & 5 que j'ay retenu font 54. j'écris 4 & je retiens 5. enfin je dis 7 fois 6 ou 6 fois 7 font 42. & 5 que j'ay retenu font 47. j'écris 47. le produit est 4746.

```
 678
   7
————
4746 produit
```

Quatriéme Exemple.

Il faut multiplier 7803 par 14. je dispose ces nombres comme cy-dessus, & je dis 4 fois 3 font 12. j'écris 2, & je retiens 1.

Je dis ensuite 4 fois 0 font 0, & 1 que j'ay retenu font 1, j'écris 1. je dis ensuite

```
  7803
    14
——————
 31212
 7803
——————
109242 produit
```

4 fois 8 font 32. j'écris 2 & je retiens 3.

Enfin je dis 4 fois 7 font 28, & 3 que j'ay retenus font 31. j'écris 31. & le premier produit partial est 31212.

Je viens ensuite au second chifre du multiplicateur qui est 1, & je dis 1 fois 3 fait 3. j'écris 3 sous le rang des dixaines. Je dis ensuite 1 fois 0, fait 0, j'écris 0, & 1 fois 8 fait 8, j'écris 8; & 1 fois 7 fait 7. j'écris 7. & le second produit partial est 7803. dixaines ou 78030. j'ajoûte ces deux produits ensemble suivant la Regle de l'addition, & la somme 109242 est le produit cherché.

Cinquiéme Exemple.

Il faut multiplier 708000 par 60300. je dispose ces nombres comme cy-dessus, & je dis 0, par 0, produit 0, j'écris 0, & 0, par 0, produit 0, &c.

Je dis ensuite	708000
3 fois 0 font 0,	60300
& 3 fois 8 font	————
24. j'écris 4 &	000000
je retiens 2; 3	000000
fois 0 font 0, &	2124000
2 que j'ay rete-	000000
nus font 2,	4248000
j'écris 2, 3 fois	————
7 font 21.	42692400000 produit

j'écris 21. & continuant de même je trouve 5 produits partiaux, dont la somme est le produit cherché 42692400000.

Cet exemple de même que tous ceux où il y a des zeros peut être abbregé, comme on voit en supprimant & sous-entendant toutes les multiplications des o, du multiplicateur en quelque rang qu'ils soient, & ne multipliant que par les chiffres significatifs, parce qu'effectivement les zeros multiplicateurs ne changent rien à l'expression des produits partiaux, si ce n'est qu'ils en augmentent la valeur en leur donnant un rang plus reculé à gauche; & on ajoûte tous les zeros qui sont à la fin du nombre à multiplier, & du multiplicateur l'operation faite toute au long démontre la raison de l'abbregé qu'on voit à côté.

```
                708000
                 60300
              --------
                  2124
                 4248
              --------
Produit . . 42692400000
```

Regle generale pour la Multiplication.

PLacez, comme dans les deux operations precedentes, le multiplicateur

ſous le nombre à multiplier, les unitez ſous les unitez, les dixaines ſous les dixaines, &c. Multipliez le premier chifre du nombre à multiplier, par le premier chifre du multiplicateur, & pour marquer le produit, il faut avoir égard à deux cas; car ou ce produit peut être exprimé par un ſeul chifre, & alors on l'écrit au rang des unitez, ou ce produit eſt exprimé par deux chifres; & alors on écrit le dernier chifre au rang des unitez, & on retient par cœur le premier pour l'ajoûter au produit des dixaines.

Multipliez enſuite par ce même chifre du multiplicateur le ſecond chifre du nombre à multiplier, & ajoûtez au produit ce que vous avez retenu du produit precedent, & ſi la ſomme peut être exprimée par un ſeul chifre, écrivez ce chifre au rang des dixaines. Si cette ſomme ne peut être exprimée que par deux chifres, écrivez le dernier au rang des dixaines, & retenez le premier pour l'ajoûter au produit des centaines, continuez de même à multiplier tout le nombre à multiplier par chaque chifre du multiplicateur, & écrivez les produits partiaux en reculant à gauche, ſelon le rang des chifres du multiplicateur; c'eſt à dire qu'en multipliant par les unitez

du multiplicateur, il faut commencer d'écrire le produit sous le rang des unitez; & en multipliant par les dixaines de ce même multiplicateur, il faut commencer d'écrire le produit sous les dixaines.

Enfin ajoûtez tous ces produits partiaux, & la somme donnera le produit cherché.

Demonstration.

Pour demontrer la verité de cette Regle & des abbregez, il n'y a qu'à considerer que multiplier un nombre, par exemple par 27. c'est la même chose que de le multiplier par 20 + 7; & le multiplier par 327, c'est la même chose que de le multiplier par 300 + 20 + 7. Or on fait chacune de ces multiplications partiales, lors qu'on multiplie premierement par 7, & puis par 2, en reculant d'un rang, & puis par 3, en reculant encore d'un rang de plus; donc en ajoûtant ces produits partiaux la somme donnera le produit total ou le nombre cherché.

Il est évident aussi que tout nombre d'unitez multiplié par des unitez produit des unitez, & que tout nombre d'unitez multiplié par des dixaines produit des dixaines, &c. C'est pourquoy on recule

d'un rang à chaque multiplication partiale, à meſure qu'on multiplie par les unitez, puis par les dixaines, &c. du multiplicateur.

La multiplication reïterée eſt lors qu'on multiplie plus de deux nombres continuellement l'un par l'autre; c'eſt à dire qu'on multiplie le premier nombre par le ſecond, & le produit on le multiplie encore par le troiſiéme nombre, & ce dernier produit encore par le quatriéme nombre; & ainſi de ſuite juſques au dernier, ce qui n'a aucune difficulté particuliere, differente de la multiplication ſimple.

Autres Exemples de Multiplication.

Un grand cercle de la terre, & qui en marque tout le tour eſt diviſé en 360 parties égales qu'on appelle degrez, chaque degré eſt de 25 lieües, & chaque lieüe de 2282 toiſes; & chaque toiſe de 6 pieds de Roy, ſuivant les obſervations les plus exactes de Monſieur Picard. On demande combien le tour de la terre a de lieües, combien de toiſes, & de pieds.

Pour avoir le nombre des lieües, il faut d'abord multiplier 360 par 25. &

on trouve 9000 lieües. Pour avoir le nombre des toises, il faut multiplier 9000 par 2282. ou 2282 par 9000. & on trouve 20538000 toises. Enfin multipliant ce dernier nombre par 6, on trouve que la terre a de tour 123228000 pieds.

```
      360
       25
    -----
     1800
      72
    -----
     9000 produit
     2282
    -----
    18000
   72000
  18000
 18000
 ---------
 20538000 produit
        6
 ---------
123228000 produit
```

Autre Exemple.

Le jour naturel est de 24 heures, & l'année Julienne est composée de 365 jours & 6 heures, on demande combien d'heures a l'année Julienne.

Il faut multiplier 365 par 24. & au produit ajoûter 6, & on trouve que le nombre des heures est de 8766, & parce que chaque heure est de 60 mi-

nutes, en multipliant ce nombre par 60. on trouve que l'année Julienne est de 525960 minutes.

365	
24	
1460	
730	
6	
8766	produit
60	
525960	produit

Remarques sur les Regles abbregées de la Multiplication.

COmme la multiplication est fatiguante dans les grands nombres, on a cherché à l'abbreger de plusieurs manieres, qui peuvent se reduire à quatre.

La premiere est de construire des Tables où les multiplications se trouvent toutes faites.

Cette Methode a trois inconveniens. Le premier d'être sujette aux fautes de calcul de l'Auteur & aux fautes d'impression, ce qui rend toûjours l'operation un peu douteuse. Le second défaut est d'être bornée à de forts petits nombres; & le troisiéme est qu'il faut presque autant de tems & de peine pour trouver

les nombres qu'on cherche dans ces Tables, que pour faire soy-même l'operation. Cependant une Table de nombres naturels pour la multiplication depuis 1. jusques à 100. par tout les nombres depuis 1, jusques à 100. pourroit être de quelque usage, elle seroit tres aisée à construire, & il seroit comme impossible qu'il s'y glissât des fautes, & supposé qu'ayant cette Table il fallut multiplier 8669 par 7987. je trancherois le nombre à multiplier, & le multiplicateur chacun en deux tranches de deux chifres chacune, en commençant de droite à gauche.

Ensuite cherchant dans la Table le produit de 87 par 69 qui est 6003. & le produit de 87 par 86 qui est 7482; & le produit de 79 par 69 qui est 5451. & enfin le produit de 79 par 86 qui est 6794. J'écrirois ces quatre produits partiaux, comme on voit suivant leurs valeurs, & la somme 69239303 seroit le produit cherché.

```
      86|69
      79|87
   --------
       6003
     7482
     5451
   6794
   --------
   69239303 produit
```

La seconde maniere d'abbreger la mul-

tiplication est de se servir de certaines machines, comme de celle qu'on appelle les batons de Neper qui ne sont autre chose que des Tables mobiles de la multiplication des neuf premiers nombres. Ces machines sont d'un usage plus étendu que les Tables, & ne sont point sujettes aux erreurs de calcul & d'impression. Je ne vois pourtant personne qui s'en serve dans la pratique, l'invention en est ingenieuse, mais ce n'est pas icy le lieu de l'expliquer.

La troisiéme maniere d'abbreger la multiplication, est de multiplier par parties, lors que le multiplicateur est luy-même un produit de deux ou plusieurs nombres multipliez continuellement; ainsi au lieu de multiplier par 15 on peut multiplier d'abord par 3, & le produit par 5; parceque 3 fois 5 font 15, & de même au lieu de multiplier par 18, on peut multiplier d'abord par 2, & le produit il faut le multiplier par 3, & ce second produit il faut encor le multiplier par 3. & ce dernier & troisiéme produit sera le produit cherché, parce que 2 fois 3 font 6, & 3 fois 6 font 18. C'est là le fondement de tout ce qu'on appelle Regles breves & parties aliquotes. Mais ce ne sont que des minuties qu'on apprend de

ſoy-même par l'uſage, & qui ne ſont point neceſſaires.

Enfin la quatriéme maniere d'abbreger la multiplication eſt fondée ſur l'expreſſion des nombres ſuivant la progreſſion decuple. Ainſi au lieu de multiplier comme dans un des exemples precedens 9000 par 2282. il auroit été plus court à cauſe des zeros de multiplier 2282 par 9000. c'eſt à dire ſimplement par 9, & ajoûter au produit trois zeros, comme on voit.

9000	2282
2282	9000
18000	20538000 produit.
72000	
18000	
18000	
20538000 produit.	

De même au lieu de multiplier par 29, il eſt plus court de multiplier par 30. & du produit ôtant une fois le nombre à multiplier le reſte eſt le nombre cherché; & de même au lieu de multiplier par 27. il eſt plus court de multiplier par 30 — 3.

EXEMPLES.

728	728
29	30 — 1
6552	21840
1456	ôtez 728
produit 21112	21112 reste.
728	728
27	30 — 3
5096	21840
1456	ôtez 2184
produit 19656	19656 reste.

Dans les grands nombres on peut pour operer plus surement se faire par addition une Table où le nombre à multiplier soit multiplié par 2, 3, 4, &c. 9. afin d'avoir tous ses produits partiaux prets ; & qu'il n'y ait qu'à les arranger & à les ajoûter.

Proposition seconde.

MUltiplier deux ou plusieurs nombres exprimez par des lettres, ou exprimez differemment.

Pour multiplier *a* par *b* on écrit *ab*; pour multiplier *a* par 3 on écrit 3 *a*, pour multiplier 3 *a* par 5 *b* on écrit 15 *ab*. Ainsi il n'y a aucune difficulté dans la multiplication simple litterale, les nombres qui precedent les lettres & qui les multiplient s'appellent des absolus, ainsi dans 3 *a*. 3 est l'absolu, & dans 15 *ab*, 15 est l'absolu. La Regle generale est donc de multiplier absolu par absolu; & de joindre au produit les lettres du multiplicateur & du nombre à multiplier, comme pour multiplier 7 *a* par 8 *b*, j'écris 56 *ab*, & pour multiplier 7 *a* par 9 j'écris 63 *a*. Cette expression est arbitraire; & n'a aucune difficulté.

La multiplication est toûjours la même pour la forme en lettres, soit que l'on multiplie par la même lettre, ou par des lettres differentes; mais cette multiplication n'est propre & parfaite, que lors qu'on multiplie un nombre litteral par un nombre abstrait. Ainsi la multiplication de 5 *a* par 3, qui donne pour produit 15 *a*, est une multiplication parfaite, parce qu'on connoît le rapport du produit, au nombre multiplié, elle n'est pourtant pas si parfaite que celle des nombres connus, parce qu'on ne connoît pas le rapport du produit 15 *a* au multiplicateur 3.

DE

DE LA MULTIPLICATION LITTERALE REÏTERÉE.

2 *a* multiplié par 3 *b* produit 6 *a b*. & 6 *a b* multiplié par 5 *c* produit 30 *a b c*.

Il est indifferent d'écrire 30 *a b c* ou 30 *b a c*, ou 30 *c b a* &c. parce qu'il est évident que de multiplier 2 par 3 ; & le produit par 5 , ou de multiplier 2 par 5 & le produit par 3 , ou de multiplier 3 par 5 , & le produit par 2 c'est toûjours le même produit 30.

Cependant le reste étant égal , il est plus naturel de suivre l'ordre de lettres de l'Alphabet.

a par *a* produit *a a*, & *a a* multiplié encore par *a* produit *a a a*, & *a a a* multiplié encór par *a* produit *a a a a*. Mais pour abbreger on écrit quelquefois a^2 au lieu de *a a*.

Et on écrit souvent a^3 au lieu d'*a a a*. & on écrit toûjours a^4, a^5, a^6, au lieu de *a a a a*, *a a a a a*, *a a a a a a*, ces chifres écrits à droite au haut de la lettre marquent le nombre de fois que la lettre a été multipliée, & ces chifres s'appellent les *exposans* de la lettre.

La Regle generale dans la multiplica-

tion reïterée est de multiplier continuellement les absolus, & d'ajoûter au produit les lettres avec la somme de leurs exposans. Ainsi pour multiplier $3a^2$ par $7a^6$ j'écris $21a^8$. ce qui est évident par ce qui vient d'être expliqué, car puisque a^2 est la même chose que aa & a^6, la même chose que $aaaaaa$ & que par l'institution le produit de aa par $aaaaaa$ s'exprime par $aaaaaaaa$. Il s'exprime aussi par a^8.

Par la même raison le produit de $7a^3b^2$ par $5a^2bc$ est $35a^5b^3c$, & pour en faire la preuve ou la Demonstration, il n'y a qu'à multiplier tout au long $7aaabb$ par $5aabc$, car on trouvera $35aaaaabbbc$ suivant la Regle generale, ce qui est la même chose que $35a^5b^3c$ exprimé plus brievement, il y a des occasions où dans l'arrangement des lettres qui absolument parlant est arbitraire, & où nous avons pourtant dit qu'en general, il étoit plus naturel de suivre l'ordre des lettres de l'Alphabet, il y a dis-je des occasions, où il est plus à propos de suivre l'ordre des exposans; & de mettre la premiere lettre celle qui a le plus grand exposant, & la seconde celle qui a l'exposant immediatement plus petit, & ainsi de suite, de sorte qu'au lieu d'é-

écrire $7a^2b^3c$, il vaut mieux écrire 7 b^3a^2c.

Remarquez qu'une lettre qui n'a point d'exposant est censée avoir l'unité pour exposant ; & par là on conserve l'Analogie. Ainsi a est la même chose que a^1.

La lettre qui marque le nombre inconnu s'il n'y en a qu'un, ou le principal inconnu s'il y en a plusieurs se met toûjours la derniere. On appelle *principal inconnu*, Le nombre dont on cherche à connoître le premier la valeur.

Definitions.

a ou a^1 s'appelle le côté, le premier degré, ou la premiere puissance d'a.

a^2 s'appelle le quarré, le second degré ou la seconde puissance d'a.

a^3 s'appelle le cube, le troisiéme degré ou la troisiéme puissance d'a.

a^4 s'appelle le quatriéme degré, ou la quatriéme puissance d'a.

a^5 s'appelle le cinquiéme degré, ou la cinquiéme puissance d'a, & ainsi de suite.

Les mots de côté, de quarré, & de cube sont étrangers à l'Algebre, & empruntez de la Geometrie, à cause du rapport que ces nombres ont avec les rap-

ports des côtez, des quarrez, & des cubes Geometriques.

Le dernier ou le plus haut degré d'une lettre s'appelle sa haute puissance; & on a appellé les autres puissances inferieures *des degrez*; parce que par le moyen de la multiplication continuelle, le nombre multiplié s'éleve comme par degrez au dernier produit, ou à la haute puissance.

Il y a cette difference essentielle entre la multiplication & la formation des puissances, que dans la multiplication, on fait abstraction si le multipliant & le multiplié sont égaux ou inégaux, au lieu que dans la formation des puissances, le multipliant & le multiplié sont d'abord supposez égaux, & on continuë de multiplier toûjours par le même nombre.

La formation du quarré répond à la multiplication simple.

La formation de toutes les autres puissances répond à la multiplication reïterée.

Et ce que la multiplication est par rapport à l'addition; La formation des puissances l'est par rapport à la multiplication.

CHAPITRE IX.

De la Division.

Definition de la Division.

LA Division est une espece de Soustraction, par laquelle on retranche d'un grand nombre un autre plus petit ou égal, autant de fois qu'il est possible; & on exprime combien de fois il y est contenu precisément ou ce qui reste.

Le nombre que l'on divise s'appelle *Nombre à diviser*, ou le *dividende*.

Le nombre par lequel on divise, s'appelle *le Diviseur*.

Le nombre qui exprime combien de fois le diviseur est contenu dans le dividende, s'appelle *le Quotient*.

Ainsi quand on divise 48 par 3, on cherche combien de fois 3 est contenu dans 48, & on trouve qu'il y est contenu 16 fois. 48 est le dividende. 3 est le diviseur & 16 est le quotient; & quand on divise 47 par 3 on trouve pour quotient 15, & il reste 2.

On suppose qu'on sache diviser par cœur, tout nombre plus petit que 90,

par tout nombre plus petit que 10, lors que le dividende contient moins de 10 fois le diviseur ; c'est à dire on suppose qu'on sache par cœur combien de fois le diviseur est compris precisément dans le dividende, & ce qui reste : par exemple on suppose qu'on sache que divisant 54 par 6, le quotient est 9, precisément : que divisant 62 par 7 le quotient est 8, & qu'il reste 6 ; que divisant 89 par 9, le quotient est 9, & qu'il reste 8. Mais comme on ne peut pas supposer raisonnablement que des commençans sachent faire par cœur toutes ces divisions qui sont au nombre de 396, sans y comprendre les divisions impropres, où le dividende étant 0, ou plus petit que le diviseur, le quotient est toûjours 0. J'ay construit les Tables suivantes où l'on trouve ces mêmes divisions primitives avec les quotiens & les restes. On a supposé que les Tables de la multiplication étoient les mêmes que celles de la division, au lieu qu'elles doivent être fort differentes. C'est peut-être en partie ce qui a fait paroître la division si difficile aux commençans ; ne trouvant point dans ces Tables tout le secours qu'ils en devoient attendre.

Tables de la Division.

Diviseurs	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
	q. r	q. r	q. r	q. r	q. r	q. r	q. r	q. r	q. r	q. r	q. r	q. r	q. r	q. r	q. r	q. r	q. r	q. r
2	1	1:1	2	2:1	3	3:1	4	4:1	5	5:1	6	6:1	7	7:1	8	8:1	9	9:1
3		1	1:1	1:2	2	2:1	2:2	3	3:1	3:2	4	4:1	4:2	5	5:1	5:2	6	6:1
4			1	1:1	1:2	1:3	2	2:1	2:2	2:3	3	3:1	3:2	3:3	4	4:1	4:2	4:3
5				1	1:1	1:2	1:3	1:4	2	2:1	2:2	2:3	2:4	3	3:1	3:2	3:3	3:4
6					1	1:1	1:2	1:3	1:4	1:5	2	2:1	2:2	2:3	2:4	2:5	3	3:1
7						1	1:1	1:2	1:3	1:4	1:5	1:6	6	2:1	2:2	2:3	2:4	2:5
8							1	1:1	1:2	1:3	1:4	1:5	1:6	1:7	2	2:1	2:2	2:3
9								1	1:1	1:2	1:3	1:4	1:5	1:6	1:7	1:8	2	2:1

Diviseurs

Seconde Table.

Dividendes

	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
3	6:2	7	7:1	7:2	8	8:1	8:2	9	9:1	9:2
4	5	5:1	5:2	5:3	6	6:1	6:2	6:3	7	7:1
5	4	4:1	4:2	4:3	4:4	5	5:1	5:2	5:3	5:4
6	3:2	3:3	3:4	3:5	4	4:1	4:2	4:3	4:4	4:5
7	2:6	3	3:1	3:2	3:3	3:4	3:5	3:6	4	4:1
8	2:4	2:5	2:6	2:7	3	3:1	3:2	3:3	3:4	3:5
9	2:2	2:3	2:4	2:5	2:6	2:7	2:8	3	3:1	3:2

Troiſiéme Table.

	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
4	7:2	7:3	8	8:1	8:2	8:3	9	9:1	9:2	9:3
5	6	6:1	6:2	6:3	6:4	7	7:1	7:2	7:3	7:4
6	5	5:1	5:2	5:3	5:4	5:5	6	6:1	6:2	6:3
7	4:2	4:3	4:4	4:5	4:6	5	5:1	5:2	5:3	5:4
8	3:6	3:7	4	4:1	4:2	4:3	4:4	4:5	4:6	4:7
9	3:3	3:4	3:5	3:6	3:7	3:8	4	4:1	4:2	4:3

Quatriéme Table.

	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
5	8	8:1	8:2	8:3	8:4	9	9:1	9:2	9:3	9:4
6	6:4	6:5	7	7:1	7:2	7:3	7:4	7:5	8	8:1
7	5:5	5:6	6	6:1	6:2	6:3	6:4	6:5	6:6	7
8	5	5:1	5:2	5:3	5:4	5:5	5:6	5:7	6	6:1
9	4:4	4:5	4:6	4:7	4:8	5	5:1	5:2	5:3	5:4

Cinquiéme

Cinquiéme Table.

	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
6	8:2	8:3	8:4	8:5	9	9:1	9:2	9:3	9:4	9:5
7	7:1	7:2	7:3	7:4	7:5	7:6	8	8:1	8:2	8:3
8	6:2	6:3	6:4	6:5	6:6	6:7	7	7:1	7:2	7:3
9	5:5	5:6	5:7	5:8	6	6:1	6:2	6:3	6:4	6:5

Sixiéme Table.

	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
7	8:4	8:5	8:6	9	9:1	9:2	9:3	9:4	9:5	9:6
8	7:4	7:5	7:6	7:7	8	8:1	8:2	8:3	8:4	8:5
9	6:6	6:7	6:8	7	7:1	7:2	7:3	7:4	7:5	7:6

Septiéme Table.

	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
8	8:6	8:7	9	9:1	9:2	9:3	9:4	9:5	9:6	9:7
9	7:7	7:8	8	8:1	8:2	8:3	8:4	8:5	8:6	8:7

Huitiéme Table.

	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
9	8:8	9	9:1	9:2	9:3	9:4	9:5	9:6	9:7	9:8

EXPLICATION DE CES TABLES.

DAns ces Tables le premier rang à gauche de haut en bas, contient les diviſeurs 2, 3, 4, &c. 9. on n'a pas mis parmi ces diviſeurs 0, ni 1, parce qu'on ne diviſe point par 0, & qu'en diviſant par 1, le quotient eſt égal au dividende, ou plûtôt parce que 1, ne diviſe point. Ainſi 3 étant diviſé par 1, le quotient eſt 3.

Le premier rang de gauche à droite contient les dividendes.

Les cellules qui répondent aux cellules d'un dividende & d'un diviſeur donnez, contiennent les quotiens precis, ou avec leur reſte.

Ainſi dans chaque cellule, il y a ordinairement deux chifres, dont le premier de gauche à droite marque le quotient; & le ſecond, qui eſt ſeparé du premier par deux points, marque le reſte: c'eſt pourquoy dans la premiere Table au deſſus du premier chifre, il y a cette lettre *q*, pour marquer que c'eſt le quotient; & au-deſſus du ſecond chifre, il y a cette lettre *r*, pour marquer que c'eſt le reſte.

Lors qu'il n'y a qu'un ſeul chifre, c'eſt le quotient precis.

La premiere Table est pour les dividendes depuis 2 jusques à 20 ; la seconde pour les dividendes depuis 20 jusques à 30 ; la troisiéme sert depuis 30 jusques à 40 ; &c. La huitiéme & derniere est pour les dividendes depuis 80 jusques à 90 exclusivement.

Pour savoir donc par exemple quel est le quotient de 54 divisé par 9. je cherche dans la cinquiéme Table 54 au rang des dividendes ; & 9. au rang des diviseurs, & je trouve dans la cellule correspondante ce nombre 6. qui marque que 6 est le quotient précis de 54 divisé par 9 : car 6 fois 9 font 54.

Mais si je veux savoir quel est le quotient de 59 divisé par 8. je trouve dans la même Table & dans la cellule qui répond au dividende 59, & au diviseur 8 ; ces deux chifres 7, 3, qui marquent que le quotient est 7 & le reste 3. Car 7 fois 8 font 56, & 56 ôté de 59 il reste 3. & ainsi des autres.

On suppose encore dans la division qu'on sache soustraire par cœur, tout produit primitif, de tout nombre qui surpasse ce produit de moins de 10. J'appelle produit primitif le produit de tout nombre plus petit que dix, multiplié par tout nombre plus petit que 10. Ainsi

24 eſt un produit primitif, parce qu'il eſt produit de 8 par 3. il faut ſavoir qu'ôtant 24 de 24, il reſte o : qu'ôtant 24 de 30 il reſte 6 : qu'ôtant 24 de 33 il reſte 9 : & ainſi des autres, juſques à 81, qui étant ôté de 90. il reſte 9.

PROPOSITION PREMIERE.

Diviſer un nombre donné par un nombre moindre que 10.

Premier Exemple.

Il faut diviſer 20 par 2. j'écris le diviſeur 2. ſous la premiere figure du dividende de gauche à droite, qui eſt auſſi 2. & je dis en 2 combien de fois 2, il y eſt 1; j'écris 1, au quotient, & multipliant mon diviſeur 2, par le quotient 1. j'ôte le produit 2, du chifre correſpondant dans le dividende, qui eſt auſſi 2. & parce qu'il ne reſte rien, je paſſe à la ſeconde operation.

		quotient
divid. . .	20.	10
diviſeur	2.	
reſte	o	
diviſeur	2	
	o	

J'écris comme reſte la ſeconde figure

du dividende o, dans le même rang de haut en bas, & j'écris de nouveau mon diviſeur 2 ſous ce reſte du dividende; & je dis en o, combien de fois 2? il y eſt o, j'écris o, pour ſeconde figure du quotient, & multipliant mon diviſeur 2 par le quotient o, j'ôte le produit o, du reſte o, & il ne reſte rien. La diviſion eſt faite, & le quotient cherché eſt 10.

II. Exemple.

	quotient
	434 | 62
diviſ.	7.
reſte	14
diviſ.	7
	o

Il faut diviſer 434 par 7. j'écris le diviſeur 7. ſous la ſeconde figure du dividende 3 & non pas ſous la premiere figure, comme dans l'exemple precedent, parce que la premiere figure 4 eſt plus petite que le diviſeur 7, & que c'eſt une regle générale qu'il faut que le diviſeur ſoit ou égal ou plus petit que le chifre, ou que les chifres du dividende, au deſſous duquel on l'écrit. Je dis enſuite en 43 combien de fois 7? il y eſt 6 fois, & il reſte 1. j'écris 6 au quotient, & j'écris 1, comme reſte au deſſous & dans le meme rang que le 3 du dividende, & que

le 7 du diviſeur. J'ajoûte à cet 1, tout de ſuite la figure ſuivante du dividende 4. ce qui donne 14 pour premier reſte, & pour ſecond ou nouveau dividende ; & je paſſe à la ſeconde operation.

J'écris de nouveau mon diviſeur d'un rang plus avancé vers la droite ; ſous le nouveau dividende 14. & je dis en 14 combien de fois 7. il y eſt 2 fois préciſément ; j'écris 2 au quotient, & parce qu'il ne reſte rien, le quotient cherché eſt 62. c'eſt à dire que 7 eſt contenu 62 fois dans 434. ou que la ſeptiéme partie de 434 eſt 62. ou que 434 étant partagé également en 7 parties, chacune de ces parties eſt de 62.

III. Exemple.

Il faut diviſer 304103 par 8. j'écris 8 ſous la ſeconde figure du dividende ; & je dis en 30 combien de fois 8 ? il y eſt 3 fois, & il reſte 6, j'écris 3 au quotient, & j'écris 6 comme reſte au deſſous & dans le même rang que le 0, du dividende & le 8 du diviſeur ; & j'ajoûte à ce 6 tout de ſuite le chifre 4, qui eſt la figure ſuivante du dividende. Ce qui me donne pour premier reſte & ſecond dividende 64, & je paſſe à la ſeconde operation.

J'écris de nouveau mon diviſeur 8, d'un rang plus avancé vers la droite ſous le nouveau dividende 64. & je dis en 64 combien de fois 8? il y eſt préciſément 8 fois, J'écris 8 au quotient, & je n'écris rien au reſte parce qu'il ſeroit inutile d'écrire un o, mais j'écris ſeulement pour reſte la figure ſuivante du dividende qui eſt 1. ce qui me donne pour ſecond reſte & troiſiéme dividende 1. Mais parce que 1, ne peut pas être diviſé par 8. & que 8 eſt contenu o, de fois dans 1, j'écris pour troiſiéme figure de mon quotient o, & je paſſe à la quatriéme operation en ajoûtant à cet 1, la figure ſuivante du dividende o, ce qui donne pour quatriéme dividende 10. & je dis, en 10 combien de fois 8? il y eſt 1e. fois, & il reſte 2, j'écris 1. au quotient, & j'écris 2, comme reſte au deſſous; & dans le même rang que le o, du dividende & le 8 du diviſeur; & j'ajoûte à ce 2. tout de ſuite la figure ſuivante du premier dividende 3, ce qui me donne pour dernier dividende 23.

J'écris de nouveau mon diviſeur ſous 23. & je dis, en 23 combien de fois 8? il y eſt 2 fois, & il reſte 7. j'écris 2 au quotient, & j'écris 7 pour dernier reſte que je garde à part; ou je l'écris à côté

du quotient avec une petite ligne entre deux, & le diviſeur 8 au deſſous de cette ligne, de cette maniere $\frac{7}{8}$, & c'eſt ce qui s'appelle *une Fraction*, dont je traitteray au Livre troiſiéme. L'operation eſt faite, & le quotient cherché eſt 38012 $\frac{7}{8}$, c'eſt à dire que 8 eſt contenu 38012 fois dans 304103, & qu'il reſte 7.

Operation.

1er dividende 304103|38012 $\frac{7}{8}$ quot.

diviſeur 8 . . . .
1er reſt.& 2.divid. 64 . . .
diviſeur 8
2. reſte & 3. divid. 1 . .
diviſeur 8
3. reſte & 4. divid. 10 .
diviſeur 8
4. reſte & 5. dividend. 23
8

7

Quatriéme Exemple.

Il faut diviſer 40018 par 8. Cet exemple ne differe du precedent dans l'operation, que parce que un dividende

partial se trouve être un 0, & que 8. dans 0, est contenu 0, de fois; l'inspection seule de l'operation suffit pour l'entendre.

Operation.

Premier dividende . .	40018 | $5002\frac{2}{8}$
diviseur	8 . . .
1er reste & second divid.	0 . .
diviseur	8
second reste & 3eme divid.	1 .
diviseur	8
troisiéme reste & 4eme divid.	18
diviseur	8
dernier reste	2

Regle générale.

1°. Ecrivez le diviseur sous la premiere figure du dividende de gauche à droite, si cette premiere figure est égale ou plus grande que le diviseur: mais si cette premiere figure est plus petite, écrivez le diviseur sous la seconde figure du dividende.

2°. Voyez combien de fois le diviseur est compris dans la premiere, ou dans les deux premieres figures du divi-

dende qui luy répondent ; & écrivez le nombre des fois au quotient : s'il reſte quelque choſe, écrivez-le au deſſous du diviſeur ; & ſoit qu'il reſte ou qu'il ne reſte rien, écrivez de ſuite la figure ſuivante du dividende, vis-à-vis & au deſſous d'elle-même, & d'un rang plus bas que le diviſeur ; écrivez ſous ce premier reſte qui eſt un ſecond dividende, vôtre même diviſeur.

3°. Voyez combien de fois vôtre diviſeur eſt compris dans ce ſecond dividende ; & écrivez le nombre de fois au quotient, s'il reſte quelque choſe écrivez-le au deſſous du diviſeur ; & ſoit qu'il reſte ou qu'il ne reſte rien, écrivez de ſuite la figure ſuivante du dividende, pour avoir un troiſiéme dividende, ſur lequel vous opererez comme vous avez fait ſur le premier & ſur le ſecond ; continuez de même juſques à la derniere figure du premier, qui donnera le dernier dividende partial, & ſi le diviſeur eſt contenu preciſément dans ce dernier dividende, la diviſion ſera finie, en écrivant au quotient le nombre des fois qu'il y eſt contenu. Que s'il reſte quelque choſe, la diviſion ſera imparfaite, & l'on écrira ce dernier reſte à côté du quotient comme fraction ; mettant

une petite ligne entre ce reste qu'on écrit dessus, & le diviseur qu'on écrit au dessous.

Autre Exemple.

L'année courante 1697. est la 2451eme depuis l'institution ou le rétablissement des jeux Olympiques, & depuis le commencement des Olympiades; chaque Olympiade est de 4 ans; on demande quelle seroit l'Olympiade courante, si l'on contoit encore par Olympiades, & quelle seroit l'année de cette Olympiade.

Il faut diviser 2451 par 4; je trouve pour quotient 612, & il reste 3. d'où je conclus que depuis le Solstice d'été, c'est à dire depuis le 22 Juin, nous sommes dans la troisiéme année de la 613eme Olympiade; ce qu'il falloit trouver.

$$\begin{array}{l} 2451|612:3. \\ \hline 4\cdot\cdot \\ 5 \\ 4 \\ 11 \\ \;\;4 \\ \hline \;\;3 \end{array}$$

Demonstration.

Diviser un nombre par un autre, c'est

prendre une telle partie du dividende; que l'unité l'eſt du diviſeur. Diviſer 60 par 3. c'eſt en prendre le tiers qui eſt 20. c'eſt à dire prendre de 60 une partie telle que l'unité l'eſt de 3. Diviſer 60 par 4, c'eſt en prendre le quart qui eſt 15. c'eſt à dire prendre de 60 une partie telle que l'unité l'eſt de 4. Car comme 1 eſt le quart de 4. de même 15 eſt le quart de 60, &c. Or par l'operation de la propoſition cy-deſſus on prend ſucceſſivement la même partie, premierement des centaines, puis des dixaines, puis des unitez; ou premierement des mille, puis des centaines, puis des dixaines, &c. ſuivant le nombre des chifres du dividende. Donc on prend la même partie de tout le dividende, c'eſt à dire qu'on le diviſe par le nombre donné; ce qu'il falloit faire: car il eſt évident qu'ajoûtant enſemble par exemple la moitié des centaines, la moitié des dixaines, & la moitié des unitez, on a la moitié totale des dixaines, des centaines & des unitez, il en eſt de même du tiers lors qu'on diviſe par 3. Du quart lors qu'on diviſe par 4: & ainſi des autres; par exemple quand je diviſe 2452. par 4. c'eſt la même choſe que ſi je me propoſois de prendre le quart de 2400 +

50 + 2 ou de 2400 + 40 + 12. Or 2400. c'eſt 24 centaines. Le quart de 24 centaines c'eſt 6 centaines, & il n'y a qu'à conſiderer que le quart de 24 eſt 6, c'eſt pourquoy j'écris 6 au quotient, & ce 6 doit être des centaines, je dis enſuite 50 ſont 5 dixaines, & le quart de 5 eſt 1. c'eſt pourquoy j'écris 1, au quotient, & ce doit être une dixaine; mais il reſte encore une dixaine qui jointe aux 2 unitez fait 12 unitez. Je dis le quart de 12 unitez eſt 3. & j'écris 3 au rang des unitez. Il eſt évident que 2452 diviſé par 4 eſt 613, puis que le quart de 2400 + 40 + 12 eſt 600 + 10 + 3. le reſte eſt une ſuite évidente de l'expreſſion des nombres, ſelon la progreſſion decuple; ce qui n'a aucune difficulté.

SECONDE PROPOSITION.

Diviſer un nombre donné par un nombre exprimé par plus d'un chifre.

PREMIER EXEMPLE.

IL faut diviſer 69 par 23. J'ecris le diviſeur 23 ſous le dividende 69, & je dis; en 6 combien de fois 2? il y eſt 3 fois, avant que d'écrire 3 au quotient, je con-

ſidere ſi la ſeconde figure 3 du diviſeur eſt auſſi contenuë 3 fois dans ce qui reſte du dividende: c'eſt à dire dans 9, & trouvant qu'il y eſt compris auſſi 3 fois, j'écris 3 au quotient, l'operation eſt finie. 3 eſt le quotient cherché.

69|3 quotient

23

Second Exemple.

Il faut diviſer 306 par 17. J'écris le diviſeur 17 ſous le dividende 306. & je dis en 3 premiere figure du dividende, combien de fois 1. premiere figure du diviſeur? Il y eſt 3 fois, mais avant que d'écrire 3 au quotient, je conſidere ſi la ſeconde figure 7 de mon diviſeur eſt auſſi contenuë 3 fois dans ce qui reſte des deux premieres figures du dividende; c'eſt à dire dans 0, & je vois qu'il n'y eſt pas compris. C'eſt pourquoy je prens un moindre quotient 2, & je dis en 3 premiere figure de mon dividende combien de fois 1? il y eſt 2 fois & il reſte 1. qui joint au zero ſuivant fait 10. mais avant que d'écrire 2 au quotient, je conſidere ſi 7 eſt contenu auſſi 2 fois dans 10, & voyant qu'il n'y eſt pas compris 2 fois, je prens 1 pour quotient que j'écris.

Je dis ensuite en multipliant le quotient par la derniere figure 7 de mon dividende 17. 1 fois 7 est 7. & 7 ôté du chifre qui luy répond dans le dividende qui est 0, je ne puis pas; j'emprunte 1 du chifre precedent qui vaut 10, & je dis de 10 ôtez 7 reste 3, j'écris 3 pour reste au dessous du 7. je dis ensuite 1 fois 1 est 1. & 1 que j'ay emprunté font 2. & 2 ôté de 3, il reste 1, que j'écris sous le 1. du diviseur. Je passe à la seconde operation aprés avoir ajoûté au reste 13 le chifre suivant 6 du dividende, de sorte que j'ay pour premier reste, & second dividende 136.

J'écris de nouveau mon diviseur en avançant d'un rang de gauche à droite sous ce nouveau dividende, & je dis en 13 combien de fois 1? il y est 13 fois; mais suivant la Regle generale je ne puis jamais prendre plus de 9 pour quotient; puisque je ne cherche qu'un chifre à la fois, & que 9 est le chifre de la plus grande valeur. Ainsi avant que d'écrire 9, je considere qu'ôtant une fois 9 de 13, il reste 4, qui joint au 6 restant, fait 46, & que 7 seconde figure de mon diviseur n'est pas comprise 9 fois dans 46. C'est pourquoy je ne prens que 8, & l'examinant avant que de l'écrire je trouve que

je puis ôter 8 fois 7 de 56. en emprun-tant 5 de 13. & que 8 fois 1, plus 5 que j'ay empruntez font les mêmes 13. C'est pourquoy j'écris 8 au quotient, & en tout 18. c'est le quotient cherché, c'est à dire que 17 est contenu 18 fois precisément dans 306.

306	18
17.	
136	
17	
00	

Troisiéme Exemple.

Il faut diviser 305438 par 237.

Operation.

Premier dividende	305438	$1288\frac{182}{237}$
diviseur	237...	
1er reste & 2d divid.	684..	
diviseur	237	
second reste & 3e. divid.	2103.	
diviseur	237	
3eme reste & 4eme. divid.	2078	
diviseur	237	
dernier reste	182	

J'écris

J'écris 237 ſous 305438, & je mets la premiere figure 2 du diviſeur ſous la premiere figure 3 du dividende, parce que celle-cy eſt plus grande que l'autre. Car ſi prenant le même nombre de chifres au commencement du dividende que dans le diviſeur, le nombre exprimé par ces chifres du dividende n'eſt pas égal ou plus grand que le diviſeur; alors il faut écrire la premiere figure du diviſeur ſous la ſeconde figure du dividende. La raiſon eſt qu'on ne peut pas diviſer un plus petit nombre par un plus grand.

Je dis en 3 premiere figure du dividende, combien de fois 2? premiere figure du diviſeur, il y eſt une fois, & je vois que tout le diviſeur 237 eſt compris au moins une fois dans 305 partie du dividende qui luy répond. C'eſt pourquoy j'écris 1, au quotient & je multiplie par ce même 1. tout mon diviſeur en commençant par les derniers chifres, c'eſt à dire par les unitez, & je dis 1 fois 7 eſt 7, & 7 ôté de 15 il reſte 8. J'ay dit 7 ôté de 15, quoy qu'il n'y ait que 5 au deſſus de 7. parce que ſuivant la Regle generale il faut emprunter des chifres precedens du dividende, & ajoûter au chifre dont on veut ôter le produit, il faut dis-je y ajoûter autant de dixaines qu'il eſt

necessaire pour en ôter ce produit. Je dis donc 7 ôté de 15 il reste 8. que j'écris au dessous du 7. comme partie du premier reste. Je dis ensuite 1 fois 3 est 3, & 3 & 1 que j'ay emprunté font 4. & 4 ôté de 10 il reste 6, j'écris 6 au dessous du 3. enfin je dis 1 fois 2 c'est 2, & 1 que j'ay emprunté c'est 3. & 3 ôté de 3. il ne reste rien. J'ajoûte au reste 68. le chifre immediatement suivant du dividende, qui est 4. & j'ay pour premier reste & nouveau dividende 684.

J'écris de nouveau mon diviseur 237 sous ce second dividende 684, & je dis en 6 combien de fois 2 ? il y est 3 fois, mais je reconnois que 3 est trop grand, parce que je ne puis pas ôter 3 fois 37 de 84. Ainsi je ne prens que 2. que j'écris au quotient, & multipliant par ce 2 tout mon diviseur 237. & commençant par le 7. je dis 2 fois 7 font 14. & 14 ôté de 14, il reste 0, que j'écris au dessous du 7, & je retiens 1. je dis ensuite 2 fois 3 font 6, & 1 que j'ay retenu font 7. & 7 ôté de 8. il reste 1, que j'écris au dessous du 3. enfin je dis 2 fois 2 font 4, & 4 ôté de 6 il reste 2 que j'écris. J'ay pour second reste 210. & y ajoûtant le chifre immediatement suivant du dividende qui est 3. J'ay pour troisiéme dividende 2103.

ſous lequel j'écris de nouveau mon diviſeur 237. & continuant l'operation je trouve que le quotient cherché eſt $1288\frac{18}{237}$.

La Regle & la Demonſtration ſont les mêmes que dans la propoſition precedente excepté que dans celle-là, on prend toûjours pour quotient le plus grand nombre de fois que le diviſeur eſt compris dans le premier ou les deux premiers chifres du dividende, ſur lequel on opere; & que dans cette ſeconde propoſition il ne faut pas toûjours prendre pour quotient le plus grand nombre de fois, que la premiere figure du diviſeur eſt compriſe dans la premiere ou les deux premieres figures du dividende, parce qu'il faut avoir égard aux autres figures du diviſeur, comme on a pu remarquer dans les exemples precedens.

Remarques ſur la Diviſion.

LA Diviſion eſt une eſpece de Souſtraction, puiſque l'on ôte le diviſeur du dividende, autant de fois qu'il eſt poſſible. C'eſt une ſouſtraction ſimple, lors que le diviſeur eſt contenu moins de deux fois dans le dividende; C'eſt une Souſtraction reïterée, lors que

le diviſeur y eſt contenu deux, ou plu-ſieurs fois.

La Diviſion differe eſſentiellement de la Souſtraction reïterée; en ce que dans la Souſtraction on fait abſtraction de l'égalité, ou de l'inégalité des nombres à ſouſtraire; au lieu que dans la diviſion, les nombres à ſouſtraire ſont tous égaux; ou plûtôt c'eſt le même nombre qu'on ſouſtrait pluſieurs fois; & ce rapport d'égalité étant plus ſimple que le rapport d'inégalité rend l'operation ſuſceptible d'abbreviation. On a été obligé de chercher une maniere abbregée de faire la diviſion, & qui fût differente de la Souſtraction, ſans quoy la diviſion auroit été impraticable par ſa longueur prodigieuſe, ſur des nombres même fort mediocres. Par exemple ſi on vouloit diviſer 306 par 17. & le faire par une ſouſtraction reïterée, il faudroit d'abord ſouſtraire 17 de 306, & du reſte 289. ôter encore 17, & du reſte 272 ôter encore 17, & continuer de même juſques à ce qu'il ne reſtât rien, ou qu'il reſtât un nombre plus petit que 17; aprés quoy il faudroit conter le nombre des ſouſtractions, qui ſe trouve dans cet exemple être 18. & 18 ſeroit le nombre, ou le quotient cherché, il eſt évident

que cela n'est pas praticable. La division differe encore de la Soustraction reïterée, en ce que dans la Soustraction, on sait combien il y a de soustractions continuelles à faire, & on cherche le reste; au lieu que dans la Division on cherche directement & principalement ce nombre de soustractions continuelles que l'on ignore; c'est à dire on cherche le quotient; & on ne cherche qu'indirectement & moins principalement ce qui reste aprés la Division.

Lors que le diviseur est contenu precisément un certain nombre de fois dans le dividende, la division est parfaite; lors qu'il n'y est pas contenu precisément, mais avec un reste la division est imparfaite. Ainsi quand on divise 48 par 3. la division est parfaite; mais lors qu'on divise 48 par 5, la division est imparfaite; & des quatre operations sur les nombres connus, ou exprimez par des chifres, il n'y a que la division qui puisse être imparfaite.

La Division est aussi la seule des quatre premieres operations qui soit sujette au tâtonnement, ce qui arrive lors que le diviseur est exprimé par plus d'un chifre, parce qu'on se regle par le premier ou les deux premiers chifres du dividende;

& par le premier chifre du diviſeur ; cependant il faut avoir égard aux autres chifres du diviſeur, ce qui fait qu'on ne peut pas voir tout d'un coup & d'une ſeule vuë quel quotient il faut prendre, avec un peu d'uſage on ne fait jamais plus d'un tâtonnement ou deux au plus. Il ne peut jamais y avoir plus de ſix tâtonnemens, ce que je démontre par cet exemple. Il faut diviſer 900 par 19. en examinant combien de fois le premier chifre du diviſeur eſt compris dans le premier chifre du dividende, on voit qu'il y eſt 9 fois, cependant 9 eſt trop grand pour quotient, à cauſe qu'on ne diviſe pas par 10. Mais par 19. & ſi on prend 8, 7, 6, 5, ils ſont encore trop grands; & on eſt obligé de prendre ſeulement 4 pour quotient. Il eſt évident que dans cet exemple le premier chifre du dividende ne peut être plus grand, & en même tems le dividende avec ce même premier chifre ne peut être plus petit, & au contraire le premier chifre du diviſeur ne peut être plus petit qu'il eſt, & en même tems le diviſeur avec ce même premier chifre ne peut être plus grand, d'où il s'enſuit que le nombre des tâtonnemens reguliers eſt le plus grand qu'il ſoit poſſible.

Pour éviter ces tâtonnemens qui sont tres incommodes, & qui rendent l'operation tres longue, il n'y a qu'à considerer que 19 approche beaucoup plus de 20 que de 10. Ainsi au lieu de dire en 9 combien de fois 1. il auroit fallu dire en 9 combien de fois 2, & on auroit d'abord pris pour *quotient d'épreuve* le nombre 4. & parce que multipliant 19 par 4. le produit étant ôté de 90. il reste moins de 19. le nombre 4 est le quotient cherché, de même si le diviseur étoit 29. on devroit le regarder comme 30, &c.

On peut donc pour éviter la plus grande partie des tâtonnemens, augmenter d'une unité la premiere figure du diviseur, lors que la seconde est, ou 9 ou 8, ou 7. & lors qu'elle est ou 4, ou 5, ou 6, on peut prendre le double de la premiere, ou des deux premieres figures du dividende selon les cas, & diviser ce double par le double de la premiere figure du diviseur, en augmentant ce double d'une unité. Ainsi si j'avois à diviser 900 par 15. au lieu de dire en 9 combien de fois 1, je dirois en 18. combien de fois 3.

Comme il ne faut pas prendre le quotient trop grand, il ne le faut pas non

plus prendre trop petit ; & on connoîtra si on l'a pris trop petit, lors que le reste est plus grand que le diviseur, ou égal. Il ne peut aussi y avoir jamais que deux chifres au plus du dividende, qui répondent au premier chifre du diviseur ; & s'il y en a davantage c'est qu'on a pris quelque quotient trop petit.

Il y a autant de divisions partielles à faire, & autant de figures au quotient que le nombre des chifres du dividende surpasse le nombre des chifres du diviseur, lors que le diviseur est plus grand que les premiers chifres en même nombre du dividende, & il y a une division de plus à faire, & un chifre de plus au quotient dans les autres cas. Ainsi s'il faut diviser 306018 par 53. comme le dividende a six chifres, & que le diviseur n'en a que deux, & que 30 premiers chifres du dividende est plus petit que 53. J'ôte deux de six, il reste quatre, je dis qu'il y a quatre divisions partielles à faire ; & que le quotient aura quatre chifres ; mais s'il avoit fallu diviser 306018 par 28. il y auroit eu 5 chifres au quotient, &c. Et de même s'il avoit fallu diviser par 31. il n'y auroit eu que 4 chifres au quotient. L'Operation seule prouve la verité de cette re-

marque,

marque, & elle est utile lors qu'il y a des o, dans le quotient.

La division est opposée à la multiplication, comme la Soustraction l'est à l'Addition.

Quand on multiplie par o, le produit est o, ce qui est un produit infiniment petit; quand on divise; ou plûtôt si l'on divisoit par o, le quotient seroit infiniment grand.

La multiplication par 1, ne change rien au nombre multiplié; & elle répond à l'addition qu'on feroit de o.

La division par 1, ne change rien aussi au dividende, & elle répond à la Soustraction qu'on feroit de o.

Des abbregez de la Division.

LA Division est la plus difficile des quatre operations, & on a cherché à l'abbreger comme la multiplication; ces abbregez se reduisent aux quatre mêmes chefs, savoir, les machines comme les batons de Neper, les Tables, les Nombres multiples, & l'expression suivant la progression decuple. Je ne diray rien des deux premieres manieres, & ce que j'en ay dit au Chapitre de la multiplication doit s'appliquer aussi à la divi-

ſion avec cette reſtriction, que par les Machines & les Tables on trouvé toûjours le produit cherché, mais qu'on ne trouve avec les mêmes machines & les mêmes Tables le quotient cherché, que lors que ce quotient eſt exact & qu'il n'y a point de reſte, dans les autres cas on trouve le quotient approché, & le reſte par une Souſtraction.

Comme la diviſion par un ſeul chifre eſt beaucoup plus aiſée que la diviſion par deux ou pluſieurs chifres, & qu'il eſt même plus aiſé, ſur tout pour des commençans de faire deux ou trois diviſions continuelles par un ſeul chifre, que de faire une ſeule diviſion par deux ou trois chifres; au lieu de diviſer par exemple par 18. on diviſe par les nombres qui ſe multipliant l'un l'autre, ou les uns les autres continuellement produiſent 18, & qui ſont exprimez par un ſeul chifre. Ainſi on diviſera d'abord par 3, & le quotient on le diviſera par 6. ou bien on diviſera d'abord par 2, & le quotient par 3, & ce ſecond quotient encore par 3. & le dernier quotient ſera le quotient cherché. C'eſt la le fondement de tout ce qu'on appelle Regles breves, & des parties aliquotes.

On peut de même au lieu de diviſer par

119. diviser d'abord par 7. & puis par 17. Parce que 7 fois 17 font 119. & au lieu de diviser par 1309. on peut diviser par 7. & le quotient par 11. & le quotient par 17. parce que 7 fois 11 fois 17 font 1309. Cette Methode n'est praticable que dans les petits diviseurs, & dans ceux où l'on voit d'abord quels sont les nombres qui se multipliant continuellement produisent le diviseur donné.

Le quatriéme abregé se reduit aux diviseurs qui sont terminez par un ou plusieurs zeros, dans ce cas il n'y a qu'à retrancher du dividende autant de chifres de droite à gauche qu'il y a de zeros à la fin du diviseur, ainsi pour diviser par 10, il n'y a qu'à trancher le dernier chifre de droite à gauche, & pour diviser par 100. il n'y a qu'à trancher les deux derniers chifres, & pour diviser par 30 il n'y a qu'à trancher le dernier chifre, & diviser le reste par 3. & pour diviser par 2300, il n'y a qu'à trancher les deux derniers chifres du dividende, & diviser le reste par 23.

Exemples.

510 | 51	513 | 51 $\frac{3}{10}$	5100 | 51
10	10	100

5180 | 51 $\frac{80}{100}$	ou	518 | 51 $\frac{8}{10}$
100		10

51837 | 22 $\frac{1237}{2300}$.

2300.
58
23

1237

Au lieu de diviſer par 5, il eſt plus commode de doubler le dividende & retrancher le dernier chifre, car c'eſt diviſer le double par 10.

Au lieu de diviſer par 25, il eſt plus commode de multiplier par 4, & de retrancher les deux derniers chifres, parce que c'eſt diviſer le quadruple par 100. & ainſi des autres.

L'uſage apprendra une infinité de ſemblables abbregez, & on ne doit point s'embarraſſer de les apprendre d'abord. La raiſon & la Demonſtration de ces Re-

gles abbregées se tirent des Regles de l'expression des nombres que j'ay expliquées, & des proprietez connuës & évidentes des mêmes nombres.

CHAPITRE X.

De la Division Litterale.

REGLE GENERALE.

IL faut commencer par écrire les lettres du dividende au dessus des lettres du diviseur & les separer par une petite ligne, effacez ensuite les lettres communes dans l'un & dans l'autre, lors qu'elles ont le même exposant, ou ôtez le petit exposant du plus grand, effacez la lettre qui a le plus petit exposant, & laissez celle qui avoit le plus grand dans son rang, en luy donnant pour nouvel exposant la difference des deux premiers. Ce qui restera marquera le quotient litteral.

Divisez ensuite l'absolu du dividende par l'absolu du diviseur, & écrivez le quotient numerique devant le quotient total, vous aurez le quotient cherché; il y a quatre cas.

PREMIER CAS.

Lors qu'il ne reste aucune lettre aprés l'effacement, le quotient numerique est le quotient cherché. Ainsi *a*, divisé par *a*, donne 1, & 2 *a*, divisé par *a*, donne 2. & 6*a* divisé par 2*a*, donne 3 pour quotient; & de même 6*ab* par 2*ab*, donne 3.

Autres Exemples.

$2a$	$\frac{2}{3}$	$31ab$	$4\frac{3}{7}$.
$3a$		$7ab$	

$\frac{2}{3}$ s'appelle une fraction, dont 2. est le *Numerateur*, & 3. est le *Denominateur*.

$4\frac{3}{7}$ est un nombre mixte, parce qu'il comprend le nombre entier 4 & la fraction $\frac{3}{7}$. Je parleray des fractions & des nombres mixtes au Livre troisiéme.

Second Cas.

Lors qu'il reste quelque lettre dans le dividende, & qu'il n'en reste point dans le diviseur. Il faut écrire ce reste aprés le quotient numerique pour avoir le quotient cherché. Ainsi, 6*aabc*, divisé par 2*ac*, donne pour quotient 3*ab*.

$$\frac{6\,aabc \mid 3\,ab}{2\,ac}$$

Car l'abſolu 6 étant diviſé par l'abſolu 2. donne pour quotient numerique 3, & effaçant des lettres du dividende *aabc*, celles du diviſeur *ac*, il reſte *ab*, que j'écris aprés 3. pour avoir 3 *ab* quotient cherché.

La preuve ſe fait en multipliant le quotient 3 *ab*, par le diviſeur 2 *ac*, car le produit 6 *aabc* eſt égal au dividende propoſé.

La raiſon de l'operation litterale dans ces deux cas eſt que la multiplication ſe faiſant par addition de lettres & d'expoſans, la ſouſtraction doit ſe faire par ſouſtraction de lettres & d'expoſans. Si ſelon l'inſtitution *a*, multiplié par *b*, produit *ab*, donc *ab*, diviſé par *a*, doit donner *b* pour quotient, & le même *ab*, diviſé par *b*, doit donner *a* pour quotient, de même que parce que 3 fois 5 font 15, on conclut que 15 diviſé par 5 donne 3, & que 15 diviſé par 3 donne 5. Ainſi en effaçant du dividende les lettres qui s'y trouvent au même degré que dans le diviſeur, on diviſe effectivement le dividende par le diviſeur, d'où il s'enſuit

que lors que la même lettre se trouve avec differens exposans dans le diviseur & dans le dividende ; on n'a qu'à soustraire l'exposant du diviseur de l'exposant du dividende, & laisser au quotient la même lettre avec l'exposant de la difference ; ainsi a^5 divisé par a^2 donne pour quotient a^3. Car a^5 est la même chose que *aaaaa* & a^2 est la même chose que *aa*, or par l'institution *aaaaa* est le produit de *aa* par *aaa*, donc *aaaaa* divisé par *aa*, donne *aaa*, ou a^5 divisé par a^2 donne a^3.

Troisiéme Cas.

S'il reste quelque lettre dans le diviseur, & qu'il n'en reste point dans le dividende, il faut écrire ce reste en fraction & en forme de denominateur sous le quotient numerique, si c'est un nombre entier, ou à côté du denominateur, si ce quotient numerique est une fraction. Ainsi 6*aab* divisé par 2*aabc* donne pour quotient $\frac{3}{c}$ & 6*aab* divisé par $2a^3b$ donne $\frac{3}{a}$ ce qui signifie 3 divisé par *c* ; 3 divisé par *a*, & $84a^3bc$ divisé par $12a^5bbc$ donne pour quotient $\frac{7}{a^2b}$ & 2*ab* divisé

par $3aab$ donne pour quotient $\frac{2}{3a}$ & $31aab$ divisé par $7a^3b^2$ donne pour quotient $\frac{31}{7ab}$.

Quatriéme Cas.

Enfin lors qu'il reste des lettres dans le dividende & dans le diviseur, on écrit le quotient numerique suivi du reste du dividende en forme de numerateur, & du reste du diviseur en forme de denominateur. Ainsi $12abc$ divisé par $3aac$ donne pour quotient $4\frac{b}{a}$ ou $\frac{4b}{a}$ & $12abc$ divisé par $17aac$ donne pour quotient $\frac{12b}{17a}$ & $31abc$ divisé par $7aac$ donne $\frac{31b}{7a}$ ou $4\frac{3}{7}\frac{b}{a}$.

Dans les deux premiers cas la division est parfaite, soit que le quotient numerique soit un nombre entier, soit que ce soit une fraction ou un nombre mixte, parce qu'on n'a égard qu'aux lettres & non pas aux absolus, dans les deux derniers cas la division est imparfaite.

-ans la diviſion litterale comme dans la diviſion numerique, la diviſion imparfaite produit les fractions. Celle-cy produit les fractions numeriques, & celle-là, les fractions litterales dont je traitteray au Livre troiſiéme.

La raiſon de l'operation dans ces deux derniers cas eſt la même que dans les deux premiers.





LIVRE SECOND,

Des quatre Operations sur les Nombres complexes.

L'Addition & la Soustraction imparfaites forment les nombres complexes. Ainsi quand j'ajoûte des quantitez de different nom où que je les soustrais, je forme un nombre complexe arithmetique, dont je connois le rapport comme lors que j'ajoûte des livres, des sols & des deniers; ou des degrez, des minutes, des secondes; des heures, des minutes; des toises, des pieds, des pouces; & les sommes sont des nombres complexes arithmetiques, & on n'en forme jamais dans la pratique que par addition, ainsi 3 l. 6 f. 8 d. qui signifie 3 liv. 6 sols, 8 deniers, est un nombre complexe arithmetique, ou les nombres 3, 6, & 8. ont des valeurs differentes à proportion de leur valeur naturelle, à cause de la valeur differente des monnoyes réelles ou d'estimation à quoy on les applique, & c'est la même chose que 3 liv. + 6 f. + 8 d.

a + *b* eſt nombre complexe litteral par addition, *a* — *b* eſt un nombre complexe par ſouſtraction, 5*a* + 3*b* + 2*c* — 8*d* — 6*e* eſt un nombre complexe par addition & par ſouſtraction reïterées, & de même 7a^3 — 3*aab*, &c. Et comme par pluſieurs additions & ſouſtractions ſimples & reïterées, on peut avoir pluſieurs des ces nombres complexes à ajoûter, à ſouſtraire, à multiplier, à diviſer les uns par les autres, ou par des nombres ſimples & incomplexes tels que ſont ceux dont j'ay traitté dans le Livre precedent; il faut avoir des regles pour faire ces quatre operations ſur ces nombres complexes.

Chapitre I.

De l'Addition des Nombres complexes Arithmetiques.

Regle Generale.

1°. ECrivez chaque eſpece ſous chaque eſpece; les livres ſous les livres, les ſols ſous les ſols , les deniers ſous les deniers; ou les toiſes ſous les toiſes, les pieds ſous les pieds, les pou-

ces ſous les pouces ; & ainſi des autres. Il faut commencer par les plus grandes eſpeces, & paſſer enſuite par degrez juſques aux plus petites & dernieres eſpeces.

2°. Ajoûtez premierement les petites & dernieres eſpeces, comme par exemple les deniers, & ſi la ſomme eſt moindre en valeur qu'une des eſpeces precedentes, écrivez dans le même rang cette ſomme, comme ſi la ſomme des deniers étoit moindre que 12 ; & qu'elle fut, par exemple 10, il faudroit écrire 10.

3°. Si cette ſomme vaut preciſement une, ou pluſieurs des eſpeces precedentes, comme ſi la ſomme des deniers eſt 12, ou 24, ou 36, &c. qui valent 1, 2, 3 ſols, &c. n'écrivez rien au rang de cette eſpece, & retenez autant d'unitez que cette ſomme vaut d'eſpeces precedentes, ſi cette ſomme eſt de 12 deniers, retenez 1, ſi c'eſt 24, retenez 2, pour les ſols.

4°. Enfin ſi cette ſomme vaut une, ou pluſieurs eſpeces precedentes, & quelque choſe de plus ; marquez dans le même rang le ſurplus, & retenez autant d'unitez que cette ſomme vaut d'eſpeces precedentes. Comme ſi cette ſomme étoit 15 deniers, il faudroit écrire 3 deniers,

& retenir 1 sol; si c'étoit 29 deniers, il faudroit écrire 5 deniers, & retenir 2 sols.

5°. Ajoûtez de même l'espece immediatement plus grande, comme les sols, en retenant 1 livre pour chaque 20 sols, & ainsi de suite en remontant jusques à la premiere & plus grande espece.

Premier Exemple.

La livre vaut 20 sols, & le sol 12 den.

il faut ajoûter,	13 l. 18 s. 6 d.
à	8 l. 1 s. 5 d.
somme	21 l. 19 s. 11 d.

il faut ajoûter,	13 l. 14 s. 9 d.
à	12 l. 5 s. 3 d.
somme	26 l. 0. 0.

il faut ajoûter,	18 l. 15 s. 8 d.
à	13 l. 18 s. 6 d.
	9 l. 5 s. 9 d.
somme	41 l. 19 s. 11 d.

Second Exemple,

La toiſe vaut 6 pieds, le pied vaut douze pouces, le pouce vaut douze lignes.

il faut ajoûter	23 t.	2 pi.	8 pou.	4 l.
à	7 t.	3 pi.	2 pou.	7 l.
ſomme	30 t.	5 pi.	10 pou.	11 l.

il faut ajoûter	15 t.	5 pi.	7 pou.	9 l.
à	18 t.	0 pi.	4 pou.	3 l.
ſomme	34 t.	0.	0.	0.

il faut ajoûter	18 t.	3 pi.	8 pou.	6 l.
	6 t.	4 pi.	4 pou.	7 l.
		5 pi.	3 pou.	8 l.
ſomme	26 t.	1 pi.	4 pou.	9 l.

Troiſiéme Exemple.

La circonference de chaque cercle, en matiere de Geometrie pratique, de Trigonometrie, de Navigation, de Geographie, d'Aſtronomie, &c. eſt ſuppoſée, di-

visée en 360 parties égales, qu'on appelle degrez ; & chaque degré en 60 parties égales, qu'on appelle minutes ; & chaque minute en 60 parties égales, qu'on appelle secondes ; & chaque seconde en 60 tierces, & ainsi de suite.

Il faut ajoûter	23° degrez.	48′ mi.	13″ s.
à	17° . .	7′ .	29′
somme	40° d.	55′ m.	42″ s.

Il faut ajoûter	23 d.	48′	13″
à	17°	11′	47″
somme	41 d.	o	o

Il faut ajouter	23 d.	48′	13″
à	17 d.	36′	58″
somme	41 d.	25′	11′



CHAPITRE II.

De l'Addition des Nombres complexes litteraux.

REGLE GENERALE.

POur ajoûter les nombres complexes litteraux, il faut les écrire l'un sous l'autre, chacun avec son signe de + ou de —; & chaque nombre incomplexe litteral sous son semblable. Il faut ensuite ajoûter separement tous les nombres incomplexes semblables qui ont le même signe, suivant les Regles generales de l'addition; & ceux qui ont un signe contraire, il faut les soustraire le plus petit du plus grand, ou la somme des plus petits de la somme des plus grands, & marquer le reste avec le signe des plus grands. La somme de ces additions particulieres donnera la somme cherchée.

Exemples.

1°.	$2a + 3b$	2°.	$2a - 3b$
	$3a + 7b$		$3a - 7b$
som.	$5a + 10b$		$5a - 10b$

$$3^o.\quad \begin{array}{r} 2a-3b \\ 3a+3b \\ \hline \text{somme } 5a+0. \end{array} \qquad 4^o.\quad \begin{array}{r} 2a-3b \\ 3a+7b \\ \hline 5a+4b \end{array}$$

$$5^o.\quad \begin{array}{r} 2a+3b \\ 3a-7b \\ \hline \text{som. } 5a-4b \end{array} \qquad 6^o.\quad \begin{array}{r} 2a+3b-5c \\ 3a-7b+2c-8d \\ \hline 5a-4b-3c-8d \end{array}$$

$$7^o.\quad \begin{array}{r} 7a^3+5aab-bbc \\ -2a^3+8aab+5bbc-3ccd \\ \hline \text{somme } 5a^3+13aab+3bbc-3ccd. \end{array}$$

Remarquez 1°. que s'il y a plusieurs nombres incomplexes semblables, c'est à dire qui ayent les mêmes lettres avec les mêmes exposans, & qu'une partie de ces nombres ayent le signe + & les autres le signe —, il faut ajoûter separément ceux qui ont le signe +, & separément ceux qui ont le signe —, afin de n'avoir à la fin que deux nombres à ajoûter, l'un positif & l'autre negatif. Ainsi pour ajoûter,

$$\begin{array}{r} +126a-63b \\ -53a+18b \\ +237a-103b \\ -589a+173b \\ \hline \end{array}$$

somme $-279a+25b$

Je fais les operations cy-dessous.

$$\begin{array}{r} +126a \\ +237a \\ \hline \text{sommes } +363a \end{array} \qquad \begin{array}{r} -589a \\ -53a \\ \hline -642a \\ \hline +363a \\ \hline \text{somme } -279a \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -63b \\ -103b \\ \hline \text{sommes } -166b \end{array} \qquad \begin{array}{r} +173b \\ +18b \\ \hline +191b \\ \hline -166 \\ \hline \text{somme } +25b \end{array}$$

Remarquez 2°. qu'on peut commencer indifferemment de gauche à droite, ou de droite à gauche.

3°. Les nombres qui ne sont precedez d'aucun signe, comme sont ordinairement les premiers nombres de gauche à droite, sont censez avoir le signe +; ainsi dans le septiéme exemple cy-dessus, $7a^3 + 5aab - 2bbc$, est la même chose que $+ 7a^3 + 5aab - 2bbc$; en ce sens le signe + marque simplement un nombre positif.

4°. La Regle de soustraire les signes contraires est fondée sur ce que le signe — marque une soustraction à faire, & qu'au contraire le signe + marque une addition à faire; ainsi lors que les nombres precedez de signes differents sont égaux, ils se détruisent & leur somme est égale à zero; $+ 3a$ ajoûté à $- 3a$ se détruisent, & la somme est o; parce qu'on ajoûte autant qu'on soustrait, ou qu'on soustrait autant qu'on ajoûte. Mais si le nombre qui est precedé du signe +, & qui par consequent doit être ajouté, est plus grand que celuy qui est precedé du signe —, & qui doit être soustrait; comme on ajoûte plus qu'on ne soustrait, il est évident qu'il faut marquer la difference de ces deux nombres avec le signe +, qui est le signe d'addition.

Au contraire si le nombre precedé du signe —, & qu'on doit soustraire est

plus grand que le nombre precedé du signe + qui doit être ajoûté, comme on soustrait plus qu'on n'ajoûte, il est évident qu'on doit marquer la difference de ces deux nombres avec le signe — qui est le signe de soustraction : il est donc vray en general que la difference des nombres incomplexes semblables precedez de signes differens, doit être marquée dans l'addition, du signe du plus grand de ces deux nombres, suivant la Regle.

CHAPITRE III.

De la Soustraction des Nombres complexes Arithmetiques.

CEtte Soustraction n'a aucune difficulté particuliere : car de même que dans la soustraction des nombres simples, on commence par soustraire les unitez des unitez, qu'ensuite on soustrait les dixaines des dixaines, &c. de même aussi dans la soustraction de ces nombres complexes, on commence par soustraire les dernieres & plus petites especes, des dernieres & plus petites especes semblables; ensuite on soustrait les especes immediatement plus grandes, des especes imme-

diatement plus grandes ; & ainsi de suite jusques aux premieres & plus grandes especes : & de même qu'on emprunte des dixaines pour payer les unitez ; on emprunte par exemple des sols pour payer les deniers, & des livres pour payer les sols, &c. Et comme l'unité qu'on emprunte pour payer les unitez vaut toûjours 10, & les zero que l'on saute valent 9. de même aussi l'unité qu'on emprunte pour payer les deniers vaut toûjours 12. parce qu'un sol vaut 12 deniers, & les 0, de sols que l'on saute valent 19. parce qu'une livre vaut 20 sols ; & ainsi à proportion de toutes les autres especes, selon le rapport que ces especes ont entre-elles.

Exemples.

de	37 liv.	15 s.	8 den.
ôtez	18 liv.	13 s.	6 den.
reste	19 liv.	2 s.	2 den.

de	37 liv.	15 s.	8 den.
ôtez	18 liv.	15 s.	8 den.
reste	19 liv.	0 -	0

de	37 liv.	14 ſ.	9 den.	
ôtez	18 liv.	17 ſ.	10 den.	
reſte	18 liv.	16 ſ.	11 den.	

de	37 liv.	0 ſ.	8 den.
ôtez	18 liv.	13 ſ.	9 den.
reſte	18 liv.	6 ſ.	11 den.

Autres Exemples.

de	8 toiſes,	5 pieds,	8 pouces.
ôtez	3 t.	4 pi.	11 pouces.
reſte	5 t.	0 pi.	9 pouces.

de	24 t.	2 pi.	3 pouces.
ôtez	5 t.	3 pi.	8 pouces.
reſte	18 t.	4 pi.	7 pouces.

de	24 t.	0 pi.	0 pou.	3 lignes.
ôtez	17 t.	4 pi.	7 pou.	10 lignes.
reſte	6 t.	1 pi.	4 pou.	5 lignes.

Autres Exemples.

de	23° degrez,	8′ minut.	35″ sec.
ôtez	15 d.	43′	58″
reste	7°.	24′	37″

de	43°	0′	0″
ôtez	18°	37′	23″
reste	24°.	22′	37″

Remarquez que, quoique les nombres entiers exprimez par plus d'un chifre soient ordinairement regardez comme des nombres simples & incomplexes, ils sont pourtant veritablement des nombres complexes. Car 237 est la même chose que 200 + 30 + 7. ou que 2 centaines + 3 dixaines + 7 unitez; les mêmes chifres n'ont pas la même valeur en differentes places, & les chifres differents en differentes places n'ont pas des valeurs differentes dans le même rapport quils auroient dans la même place. C'est en cela que consiste la nature des nombres complexes; mais l'expression de ces nombres entiers est beaucoup plus simple

ſimple que celles de toutes les autres eſpeces de nombres complexes, par deux raiſons. 1°. Parce que le rapport d'une eſpece à l'autre eſt toûjours le même, c'eſt à dire de dix à un ; au lieu que dans la pluſpart des autres nombres complexes, ce rapport eſt different. 1 livre vaut 20 ſols, & 1 ſol ne vaut pas 20 deniers, mais ſeulement 12. 1 toiſe vaut 6 pieds, & 1 pied ne vaut pas ſeulement 6 pouces, mais il en vaut 12.

2°. Dans l'expreſſion des nombres entiers, le rapport eſt fondé en raiſon, au lieu que dans les autres nombres Arithmetiques complexes le rapport eſt arbitraire, ou trop grand, ou trop petit. Celuy des degrez, minutes, ſecondes, &c. eſt certainement trop grand & fatigue l'imagination; il ſeroit à ſouhaiter que dans les diviſions & ſubdiviſions arbitraires de chaque tout réel & d'eſtimation on eût ſuivi la progreſſion decuple, le calcul en eût été ſans comparaiſon plus aiſé.

Remarquez 2°. que tout l'avantage de l'expreſſion ordinaire des nombres, de laquelle on attribue l'invention aux Arabes, ne vient que de l'expreſſion du zero, il n'étoit pas difficile de marquer des nombres réels & poſitifs par des caracteres, & rien n'étoit plus naturel que

de se servir pour cela des lettres de l'Alphabet, comme étant des caracteres déja tout trouvez, des caracteres simples & ausquels l'imagination étoit accoûtumée, mais il étoit difficile de s'aviser d'exprimer la negation même du nombre, & de tirer quelque usage de cette expression.

Cependant sans le zero il est impossible de conserver une parfaite Analogie dans l'expression abbregée des nombres. Les Grecs par exemple exprimoient les cinq premiers nombres 1, 2, 3, 4, 5, par les cinq premieres lettres de leur Alphabet, ils exprimoient 6 par une lettre double, *st*, qui étoit hors de son rang; ce qu'ils appelloient un *Episeme*; & ils continuoient d'exprimer les nombres 7, 8, 9, par la sixiéme, septiéme & huitiéme lettres de leur Alphabet. Ils exprimoient 10 par la neuviéme; 20 par la dixiéme; 30 par la onziéme, &c. 90 par un caractere nouveau, ou second *Episeme*. 100 par la dix-septiéme lettre, 200 par la dix-huitiéme, &c. 900 par un nouveau caractere, ou troisiéme *Episeme*. Ainsi avec leurs 24 lettres & trois *Episemes*, ils exprimoient tous les nombres depuis 1, jusques à 1000. exclusivement, ils exprimoient 1000, 2000, 3000, &c.

par la premiere, la seconde, la troisiéme, &c. lettres de leur Alphabet avec un point au dessous, ou une petite ligne en forme d'accent en bas, à droit ou à gauche indifferemment, & ils exprimoient ainsi tous les nombres jusques à un million exclusivement, &c. Cette maniere d'expression est aprés celle des Arabes la plus parfaite qu'on ait trouvée, & ce n'est pas icy le lieu d'en dire davantage; cependant il est aisé de voir de combien elle est moins simple, moins uniforme, moins étenduë que celle des Arabes, pour exprimer ce nombre 222. il faut trois lettres differentes chez les Grecs, & chez les Latins, au lieu qu'il ne faut qu'un seul chifre repeté dans nôtre Methode, & ces trois lettres differentes font un nombre complexe plus composé.

Remarquez enfin que la difference des nombres complexes arithmetiques, & des nombres complexes litteraux consiste en ce que dans les premiers, on connoît en nombres le rapport d'une espece à l'autre, comme des livres aux sols, des sols aux deniers, & que dans les nombres complexes litteraux on ne connoît point ce rapport dans $a + b$, on ne connoît point le rapport de a avec b.

Chapitre IV.

De la Souſtraction des Nombres complexes Litteraux.

Regle Generale.

ECrivez les nombres à ſouſtraire ſous les nombres ſemblables, dont on les doit ſouſtraire chacun avec ſon ſigne.

Si ces ſignes ſont ſemblables, & ſi le nombre à ſouſtraire eſt égal ou plus petit que celuy dont on ſouſtrait, il faut faire la ſouſtraction ſuivant la Regle des nombres ſimples & incomplexes, & mettre devant le reſte le même ſigne.

Si les ſignes étant ſemblables, le nombre à ſouſtraire eſt le plus grand, il faut marquer leur difference avec un ſigne contraire.

Si les ſignes ſont differens il faut ajoûter les nombres, & donner à la ſomme le ſigne du nombre dont on ſouſtrait.

Si dans le nombre complexe à ſouſtraire il y a des nombres incomplexes, qui n'ayent point leur ſemblables dans le nombre complexe dont on ſouſtrait, il faut changer le ſigne de ces nombres

à ſouſtraire & l'écrire avec le reſte.

Enfin ſi dans le nombre complexe dont on ſouſtrait, il y a des nombres qui n'ayent point leurs ſemblables dans le nombre que l'on ſouſtrait, il ne faut rien changer à ces nombres; mais les écrire avec le reſte.

Exemples du premier Cas.

1°. de $5a + 10b$ 2°. de $5a - 10b$
ôtez $2a + 3b$ ôtez $2a - 3b$

reſte $3a + 7b$ reſte $3a - 7b$

3°. de $5a + 3b$
ôtez $2a + 3b$

reſte $3a + 0$. ou $3a$

Exemples du ſecond Cas.

4°. de $5a + 3b$ 5°. de $5a - 3b$
ôtez $2a + 10b$ ôtez $2a - 10b$

reſte $3a - 7b$ reſte $3a + 7b$

Exemples du troiſiéme Cas.

6°. de $5a + 3b$ 7°. de $5a - 3b$
ôtez $2a - 7b$ ôtez $2a + 7b$

reſte $3a + 10b$ reſte $3a - 10b$

Exemples du quatriéme Cas.

8°. de $5a + 3b$
ôtez $2a + 7b + 2c$

reste $3a - 4b - 2c$

9°. de $5a + 3b$
ôtez $2a + 7b - 2c$

reste $3a - 4b + 2c$

Exemples du cinquiéme Cas.

10°. de $5a + 3b + 2c$
ôtez $2a + 4b$

reste $3a - 1b + 2c$

11°. de $5a + 3b - 2c$
ôtez $2a + 4b$

reste $3a - 1b - 2c$

On peut comprendre tous ces cas sous une seule Regle ; qui est de changer tous les signes des nombres à soustraire, & les ajoûter ensuite au nombre dont on soustrait ; la somme donnera le reste cher-

ché. Par exemple pour soustraire $2a - 3b$ de $5a + 7b$, j'écris $-2a + 3b$, sous $5a + 7b$ & je les ajoûte; la somme $3a + 10b$ est le reste cherché.

Cette Regle est vraye, parce que par le changement des signes on fait une veritable soustraction; mais elle n'est ni naturelle ni utile: elle n'est pas naturelle, parce que c'est un détour de faire par addition ce qu'on se propose d'abord de faire par soustraction, elle est inutile en ce que l'on n'évite pas, la multiplicité des cas qui sont toûjours les mêmes dans le fonds, & le changement des signes ne fait que rendre l'operation plus longue & plus sujette à erreur. Ce que j'ay dit pour expliquer & pour démontrer la Regle de l'addition des nombres complexes, doit s'appliquer à la Regle de la soustraction, & cette application est trop aisée pour s'y arrêter. Il suffit de remarquer qu'ajoûter $-$ c'est veritablement soustraire, & soustraire $-$ c'est veritablement ajoûter.

CHAPITRE V.

De la Multiplication des nombres complexes Litteraux.

LA Multiplication des nombres complexes litteraux est plus simple que celle des nombres complexes arithmetiques; c'est pourquoy je commence par les litteraux.

REGLE GENERALE.

Multipliez chaque partie du nombre à multiplier, par chaque partie du multiplicateur, en observant que les signes semblables produisent +, & les signes differens produisent —. La somme de tous les produits partiaux donnera le produit cherché.

Exemples.

Pour multiplier $2a + 3b$ par 5, j'écris 5 sous $2a$ & sous $3b$, & je dis 5 fois $2a$ font $10a$; que j'écris sous $2a$; je dis ensuite, 5 fois $3b$ font $15b$, & j'écris + $15b$. Le produit est $10a + 15b$.

$2a +$	$3b$	$2a -$	$3b$
5	5	5	5
pr. $10a +$	$15b$	$10a -$	$15b$ produit.

Pour multiplier $4a + 5b$ par $2a + 3b$, j'écris ces deux nombres complexes l'un sous l'autre, chaque nombre incomplexe sous son semblable, ensuite commençant par $2a$, je dis $2a$ par $4a$ produit $8aa$, que j'écris au produit. Je multiplie aussi $+ 5b$ par le même $+ 2a$ & j'écris au produit $+ 10ab$.

Je passe ensuite à la seconde partie du multiplicateur, qui est $3b$ & je dis $3b$, par $4a$ produit $12ab$, & $+ 5b$ par le même $3b$, produit $+ 15bb$, j'écris $+ 12ab + 15bb$, & ajoûtant tous ces produits ensemble, le produit total & cherché est $8aa + 12ab + 10ab + 15bb$ ou $8aa + 22ab + 15bb$.

$$\begin{array}{l} 4a + 5b \\ 2a + 3b \\ \hline 8aa + 10ab \text{ produits.} \\ \quad\quad + 12ab + 15bb \text{ produits.} \\ \hline 8aa + 22ab + 15bb \text{ prod. cherché.} \end{array}$$

Pour multiplier $4a - 5b$ par $2a - 3b$. Je dis en commençant par $4a$ & $2a$, lesquels suivant ce que j'ay dit cy-dessus sont censez avoir le signe $+$; je dis donc en ne considerant que ces signes $+$ par $+$ produit $+$; passant ensuite aux absolus, 2, & 4, je dis 2 fois 4 font 8. j'écris 8. ensuite multipliant la lettre *a*, par la lettre *a*, j'écris le produit *aa*, & le premier produit partial est $+ 8aa$, ou simplement $8aa$. Je passe à la seconde partie du nombre à multiplier qui est $- 5b$ que je dois multiplier par $+ 2a$, & je dis $+$ par $-$ produit $-$ j'écris $-$; 2 par 5 produit 10 j'écris 10; *a* par *b*, produit *ab*, j'écris *ab*, & le second produit partial est $- 10ab$.

Je passe ensuite à la seconde partie du multiplicateur qui est $- 3b$, & je dis $- 3b$ par $+ 4a$ produit $- 12ab$, & $- 3b$ par $- 5b$ produit $+ 15bb$ que j'écris, & j'ay pour produit total & cherché $8aa - 22ab + 15bb$.

$$\begin{array}{rrr} +4a & -5b & \\ +2a & -3b & \\ \hline 8aa & -10ab & \\ & -12ab & +15bb \\ \hline 8aa & -22ab & +15bb \end{array}$$

produit.

Autre Exemple.

$$\begin{array}{l} 7aa - 4ab + 3bb \\ \text{par } 3aa - 5ab + 2bb \\ \hline 21a^4 - 12a^3b + 9aabb \text{ produits.} \\ \quad - 35a^3b + 20aabb - 15ab^3 \\ \quad\quad + 14aabb - 8ab^3 + 6b^4 \\ \hline 21a^4\ 47a^3b + 43aabb - 23ab^3 + 6b^4 \\ \text{produit total.} \end{array}$$

Remarquez 1°. qu'on peut commencer indifferemment de droite à gauche ou de gauche à droite, en commençant de gauche à droite on conserve plus d'Analogie avec la multiplication numerique & ordinaire.

2°. Lors que les absolus sont un peu grands, c'est à dire que l'un des deux est exprimé par plus d'un chifre, il faut multiplier ces absolus séparement.

3°. Dans chaque multiplication partiale, il faut avoir égard à quatre choses, savoir, au signe, à l'absolu, à la lettre, ou aux lettres, & à l'exposant de la lettre, pour multiplier $+ 23a^3b^2$ par $- 57a^5b^3$, il faut dire 1°. + par — produit —, ensuite 23 par 57 produit 1311. faisant cette multiplication à part, enfin

a^3b^2 par a^5b^3 produit a^8b^5 en écrivant les mêmes lettres, & ajoûtant leurs exposans & le produit partial est $-1311a^8b^5$.

4°. Quoique l'arrangement des parties des nombres complexes soit indifferent en un sens; cependant il est utile de les ranger chacune selon l'ordre des exposant de la lettre la plus élevée, lors qu'il n'y a point d'inconnuë, & lors qu'il y en a une il faut les ranger selon l'ordre des exposans de cette inconnuë, par exemple pour multiplier $4ab - 7aa$ par $3aa - 5ab$, il faut écrire le nombre à multiplier de cette maniere $-7aa + 4ab$, & au dessous le multiplicateur $+3aa - 5ab$.

De même pour multiplier $2abbc + 4a^3b - 5aad^2$ par $bacd, + 3bbd + 8aab$, il faut ranger le premier nombre sous cette forme $+4a^3b - 5aad^2 + 2abbc$, en se reglant par a^3, aa, a; & le second sous celle-cy $+8aab + abcd + 3bbd$, en se reglant par aa, a, & il faut se regler par la même lettre dans l'un & l'autre des deux nombres complexes, & lors qu'il y a quelque signe $-$ dans l'un des deux, il faut exprimer le signe $+$ qu'on sousentend ordinairement au premier terme.

5°. On abbrege le produit par addition ou soustraction, lors qu'il se trouve

des produits partiaux ſemblables, comme on peut voir dans les derniers exemples cy-deſſus, & en obſervant l'arrangement de la lettre la plus élevée que nous appellerons dans la ſuite *la lettre principale*, ces produits partiaux ſemblables ſe trouvent naturellement diſpoſez dans la même colomne, ce qui en facilite la reduction ou abbreviation. Ces degrez differens de la lettre principale rangez par ordre répondent à l'arrangement ordinaire des unitez, des dixaines, des centaines, &c. dans l'expreſſion & dans la multiplication numerique.

Demonſtration de la Regle.

Il n'y a nulle difficulté à comprendre pourquoy + par + produit +; pourquoy $+ 4a$ multiplié par $+ 2a$ produit $+ 8aa$. Car il eſt évident qu'un nombre poſitif multiplié par un nombre poſitif, doit produire un nombre poſitif, c'eſt ajoûter un nombre poſitif à luy même un certain nombre de fois, donc la ſomme eſt un nombre poſitif.

Il eſt auſſi fort aiſé de voir pourquoy + par —, ou — par + produit —; pourquoy $a - b$ multiplié par c produit $ac - bc$ ou pourquoy c multiplié par $a - b$

produit $ac - bc$. Car quand on multiplie $a - b$ par c, on ne veut pas multiplier a, tout entier par c, mais seulement $a - b$. Ainsi lors qu'on a multiplié a par c, le produit ac, est trop grand, & il l'est trop precisément du produit de b par c, c'est pourquoy on retranche bc, & on écrit $ac - bc$. C'est le même raisonnement si on multiplie c par $a - b$.

Que si l'on veut considerer le nombre negatif absolument & indépendamment du nombre positif, il est encor évident que multipliant $- b$ par c, le produit est $- bc$, car c'est ajoûter $- b$ à luy-même autant de fois que c, contient d'unitez réelles ou supposées; or la somme de plusieurs nombres negatifs ne peut être que negative.

Il y a un peu plus de difficulté à expliquer pourquoy $-$ par $-$ doit produire $+$; pourquoy $- b$ par $- d$ produit $+ bd$. Si l'on veut considerer ces nombres negatifs absolument & indépendamment des nombres positifs; on peut dire que puisque $- b$ multiplié par $+ d$; c'est à dire ajoûté à luy-même positivement un certain nombre de fois produit un nombre negatif $- bd$, ce même nombre negatif $- b$ multiplié par $- d$, c'est à dire étant ajoûté à luy-même negativement

doit produire le nombre positif opposé + bd, parce que la negation d'un nombre negatif est un nombre positif. Mais cette raison est trop Metaphysique, & la supposition absoluë des nombres negatifs ou moindres que rien peut être traittée d'impossible & d'imaginaire, c'est pourquoy voicy une preuve plus sensible & plus convainquante.

Le cas dont il s'agit ne peut jamais arriver réellement, que lors qu'on multiplie un nombre complexe par soustraction, par un autre nombre complexe par soustraction, comme par exemple si on doit multiplier $+ a - b$ par $+ c - d$, mais en ce cas quand je multiplie $+ a$ par $+ c$ & que j'écris le produit ac, ce produit est trop grand par deux raisons. La premiere parce que j'ay pris a tout entier pour nombre à multiplier, & j'ay seulement $a - b$; la seconde, parce que j'ay pris c tout entier pour multiplicateur, & j'ay seulement $c - d$. Je remedie d'abord à la premiere de ces deux erreurs en multipliant b par c & retranchant bc, car le reste $ac - bc$ est veritablement le produit de $a - b$ par c. Mais ce produit est encor trop grand par la seconde raison, prise de l'excez du multiplicateur pour lequel j'ay pris c tout entier, au lieu

de prendre ſeulement $c - d$; je multiplie donc a par d, & j'ôte le produit ad, & il reſte $ac - bc - ad$. Mais ce reſte eſt trop petit, parce que j'ay trop ôté, il ne falloit pas ôter le produit de a tout entier par d, mais ſeulement le produit de $a - b$ par d, j'ay donc trop ôté preciſément du produit de b par d, c'eſt à dire du nombre bd, il faut donc que je l'ajoûte par le ſigne + pour avoir le veritable produit $ab - bc - ad + bd$. Et voilà comment $-d$ par $-b$ produit $+ bd$. Ou plus ſimplement pour avoir le produit de $a - b$ par $c - d$, il eſt évident qu'il n'y a qu'à ôter le produit de $a - b$ par d, du produit d'$a - b$ par c, c'eſt à dire qu'il faut ôter $ad - bd$, de $ac - bc$, & pour cela il n'y a qu'à changer les ſignes du produit $ad - bd$, & écrire $ac - bc - ad + bd$.

En nombres $7 - 2$, qui eſt égal à 5 étant multiplié par $9 - 3$ qui eſt égal à 6, le produit doit être 30. or en multipliant ſuivant la Regle $7 - 2$ par $9 - 3$ comme ſi c'étoit des nombres complexes, on trouve $63 - 18 - 21 + 6$, c'eſt à dire $69 - 39$ qui eſt égal à 30. comme il falloit.

CHAP.

CHAPITRE VI.

De la multiplication des Nombres complexes Arithmetiques.

IL y a deux cas, le premier eſt de multiplier un nombre complexe Arithmetique par un nombre abſtrait : le ſecond de multiplier un nombre complexe par un autre nombre complexe.

Dans le premier cas il n'y a point de difficulté. Il faut multiplier ſeparement chaque eſpece en commençant par les dernieres & les plus petites, & réduire à meſure qu'on multiplie, les produits des petites eſpeces aux eſpeces prochainement plus grandes, ſelon le rapport que ces eſpeces ont entre elles.

Exemple.

D'une nouvelle Lune à l'autre il y a 29 jours, 12 heures, 44 minutes, 3 ſecondes ou environ, on demande combien font 235 mois Lunaires.

Il faut multiplier 29 jours, 12 heures, 44′ 3″ par 235.

Operation.

235
$44'$
———
940
940
11
———
10351 | 172
———
60..
435
60
———
151
60
———
$31'$ reste

235
$3''$
———
$705''$ | $11'$
———
60.
105
60
———
$45''$ reste.

235
29 jours.
———
2115
470
124
———
6933 jours.

235
12 heures.
———
470
235
172
———
2992 | 124
———
24..
59
24
112
24
———
16 heures reste.

Le produit est 6933 jours, 16 heures, 31 minutes, 45 secondes, & c'est à peu prés la valeur de 235 mois Lunaires.

Je multiplie d'abord 235 par 3'' ce qui produit 705'' & parce que chaque 60'' valent 1' je divise 705 par 60, le quotient est 11' que je garde pour ajoûter au produit des minutes, & j'écris le reste 45''.

Je multiplie ensuite 235 par 44' & au produit j'ajoûte les 11' que j'ay retenuës, ce qui donne pour produit & pour somme 10351', que je divise par 60 pour avoir des heures, le quotient est 172 que je garde pour ajoûter au produit des heures, & j'écris le reste 31'.

Je multiplie ensuite 235 par 12 h. & au produit j'ajoûte les 172 h. que j'ay retenuës, ce qui donne pour produit & pour somme 2992 heures, & parce que chaque 24 heures font 1 jour, je divise 2992 par 24. Le quotient est 124 que je garde pour ajoûter au produit des jours.

Enfin je multiplie 235 par 29 & au produit j'ajoûte 124 que j'ay retenu, ce qui donne pour produit & pour somme 6939 jours; & en tout 6939 jours 16 heures 31' 45''.

Second Exemple.

L'année Julienne est de 365 jours, 6 heures, on demande combien font 19 ans, il faut multiplier 365 jours, 6 h. par 19.

Operation.

365 jours.	6
19	19
3285	114 | 4
365	
4	24
6939	18 reste.

Le produit est 6939 jours, 18 heures, d'où il s'ensuit qu'au bout de dix-neuf ans la nouvelle Lune arrive le même quantiéme du mois à une heure & quelques minutes de difference prés. C'est ce qu'on appelle le nombre d'or.

Troisiéme Exemple.

On demande combien valent 305 aunes de drap à 15 l. 6 s. 8 d. l'aune, il faut multiplier 15 l. 6 s. 8 d. par 305.

Operation.

305	305	305
15 liv.	6 s.	8 d.
————	————	————
1525	1830	2440 | 203
305	203	————
101	————	12 ..
————	2033 | 101	4 .
4676 liv.	————	12
	20 ..	40
	————	12
	13. reste	————
		4 reste.

Le produit est 4676 l. 13 s. 4 d.

Les Marchands ont accoûtumé de faire cette multiplication d'une autre maniere qu'il appellent *les parties aliquotes* & *aliquantes*. Mais cette Methode-cy est sans comparaison plus aisée à apprendre & à retenir, elle est même plus aisée à pratiquer en plusieurs cas, & moins sujette à erreur. Voicy en quoy consiste la Methode ordinaire.

Lors qu'un petit nombre est contenu precisément un certain nombre de fois dans un plus grand, on dit que ce petit nombre mesure le plus grand, ou qu'il est

partie aliquote du plus grand. Ainsi 3 mesure 15, ou est partie aliquote de 15, parce qu'il en est precisément la cinquiéme partie.

Lors qu'un petit nombre n'est pas contenu precisément un certain nombre de fois dans un plus grand, on dit que ce petit nombre ne mesure pas le plus grand, & qu'il est partie aliquante du plus grand. Ainsi 4 ne mesure pas 15, & il est partie ou partie aliquante de 15.

Toute partie aliquante contient precisément un certain nombre de fois, ou la même ou differentes parties aliquotes. Car l'unité étant suivant la definition cy-dessus, partie aliquote de tous les nombres, le petit nombre contiendra au moins precisément cette partie aliquote. Ainsi 4 contient 4 fois la quinziéme partie de 15. & 6 contient 3 fois le quart de 8, qui est 2. & le même 6 contient une fois la moitié de 8, & une fois le quart du même 8: & 8 par rapport à 20. contient 2 fois la cinquiéme partie de 20 qui est 4. & 7 contient une fois la cinquiéme partie du même 20, qui est 4, & une fois la dixiéme partie de ce même 20, ou ce qui revient au même, une fois la moitié de la cinquiéme partie qui est 2, & encor une fois la moi-

tié de cette dixiéme partie qui eſt 1, car 4 + 2 + 1 ſont égaux à 7.

Cela étant ſuppoſé il eſt évident que de multiplier un nombre par 10 ſ. c'eſt la même choſe que de le multiplier par la moitié d'une livre, parce que 10 ſ. ſont la moitié d'une livre. Ainſi au lieu de multiplier par exemple 36 aunes par 10 ſ. & réduire le produit 360 ſ. en livres, en diviſant 360 par 20. il ſera plus court de prendre tout d'un coup la moitié de 36 qui eſt 18. & le produit cherché eſt 18 liv. & ſi le nombre propoſé eût été impair, l'unité reſtante auroit valu 10 ſ. 37 aunes à 10 ſ. valent 18 livres, 10 ſ.

Par la même raiſon, au lieu de multiplier par 5 ſ. il n'y a qu'à prendre le quart, & pour multiplier par 6 ſ. 8 d. il n'y a qu'à prendre le tiers, parce que 6 ſ. 8 d. ſont le tiers d'une livre. Au lieu de multiplier par 13 ſ. 4. il faut écrire deux fois le tiers & l'ajoûter, & ainſi des autres. Mais pour multiplier par 9 d. il faut conſiderer que 9 d. ſont les trois quarts d'un ſol, ou la moitié, plus la moitié de la moitié d'un ſol. Or ſi on avoit à multiplier par exemple 36 aunes par 1 ſol, il eſt évident que le produit ſeroit 36 ſols, donc pour multiplier

36 aunes par 9 d. il n'y a qu'à prendre la moitié de 36 qui est 18, & la moitié de cette moitié qui est 9. & ajoûter 9 à 18, pour avoir le produit cherché 27 sols, ou 1 l. 7 s.

Pour réduire les deniers en sols au lieu de diviser par 12, on peut prendre le tiers, & ensuite le quart du tiers. Car le quart du tiers est un douziéme. Ou la moitié & ensuite un sixiéme.

Pour réduire les sols en livres, au lieu de diviser par 20, il n'y a qu'à trancher le dernier chifre à droite, & prendre la moitié de ce qui reste. Car en tranchant le dernier chifre on prend la dixiéme partie ou l'on divise par 10. & prenant la moitié de cette dixiéme partie, on divise par 20.

Exemple.

305 aunes à 15 l. 6 s. 8 d. combien valent elles.

Operation.

305
15 l. 6 s. 8 d.

1525
305
un tiers 101 l. 13 s. 4 d.

4676 l. 13 s. 4 d. com. cy-dess.

Le

Le tiers de 305 est 101. car le tiers de 3 est 1. le tiers de 0 est 0, le tiers de 5 est 1. & il reste 2. c'est à dire 2 l. ou 40 s. dont le tiers est 13 s. 4 d.

Autre Exemple.

Combien valent 307 aunes à 15 liv. 7 s. 5 den.

Operation suivant la premiere Methode.

307	307	307
15 l.	7 s.	5 d.
1535	2149	1535|127
307	127	12..
113	227|6|113	33.
4718 l.	20.	12
	16 reste	95
		12
		11

Le produit est 4718 liv. 16 s. 11 d.

Operation par les parties aliquotes.

```
   307
  15 l.  7 f.  5 d.
 ___________________
l. 1535
  307
 _______
f.   76 l. 15 f. pour 1/4 de liv. ou 5 sols.
     30 l. 14 f. pour 1/10eme de liv. ou 2 f.
 _______
den.  6 l.  7 f. 11 d.
 ___________________________
  4718 l. 16 f. 11 d.

       102 : 1 . qui vaut 3 d. pour 4 d.
         25 : 2 . qui valent 8 d. pour 1 d.
   ______________          _______
       12|7 f.                11
```

Le produit est comme cy-dessus 4718 liv. 16 f. 11 d. mais cette derniere Methode est sans comparaison plus fatiguante, plus longue & plus sujette à erreur que la premiere.

Il y a de même plusieurs petites abbreviations, pour les autres especes que l'usage apprendra, & qui ne valent pas la peine d'être expliquées.

De la multiplication des Nombres complexes Arithmetiques, les uns par les autres.

LA Methode la plus ſure & la plus aiſée à retenir eſt de réduire chacun des deux nombres complexes au ſeul nombre incomplexe de leurs plus petites eſpeces, ce qui ſe fait par la multiplication & l'addition. Il faut enſuite multiplier un incomplexe par l'autre pour avoir le produit cherché en petites eſpeces, & on reduira par la diviſion ces petites eſpeces aux moyennes, & ces moyennes aux plus grandes pour avoir l'expreſſion la plus ſimple de ce même produit.

Exemple.

On demande combien valent 7 toiſes, 5 pieds, 8 pouces de maſſonnerie à 30 liv. 7 ſ. 5 d. la toiſe ſur une toiſe de largeur. Je reduis tout en pouces, & en deniers.

Puiſque chaque toiſe vaut 6 pieds; 7 toiſes plus 5 pieds vaudront 47 pieds, & puiſque chaque pied vaut 12 pouces, 47 pieds plus 8 pouces vaudront 572 pouces. Ainſi au lieu du nombre complexe

7 toiſes, 5 pieds, 8 pouces, j'auray le nombre incomplexe 572 pouces.

Je trouveray de même au lieu de 30 liv. 7 ſ. 5 d. le nombre incomplexe 7289 deniers. Car puiſque chaque livre vaut 20 ſ. 30 liv. plus 7 ſ. vaudront 607 ſ. & puiſque chaque ſol vaut 12 deniers, 607 ſ. plus 5 deniers vaudront 7289 deniers. Je ſay donc qu'une toiſe ou 6 pieds; ou 72 pouces valent 7289 deniers. Il s'agit de ſavoir combien valent 7 toiſes, 5 pieds, 8 pouces, ou 572 pouces, ſur quoy je fais ce raiſonnement, ſi 1 pouce valoit 7289 deniers; pour ſavoir combien valent 572 pouces, il n'y auroit qu'à multiplier 7289 par 572. cela eſt évident. Mais puis qu'il faut 72 pouces pour valoir 7289 d. chaque pouce vaut 72 fois moins, il faudra donc diviſer le produit par 72. pour avoir la valeur des 572 pouces. C'eſt je crois la maniere la plus ſimple d'expliquer & de démontrer la Regle de trois, ou la Regle d'or, dont je parleray encore dans la ſuite.

Je multiplie donc 7289 par 572, & je diviſe le produit 4169308 par 72. le quotient 57907 $\frac{4}{72}$ eſt le nombre des deniers que valent les 7 toiſes, 5 pieds, 8 pouces de longueur, ſur 1 toiſe de largeur à 30 liv. 7 ſ. 5 d. la toiſe. Je reduis

en sols ces 57907 deniers negligeant la fraction, & divisant par 12; le quotient est 4825 sols, & il reste 7 deniers. Je reduis ces 4825 sols en livres, en divisant par 20, ou ce qui revient au même, tranchant le dernier chifre 5, & prenant la moitié du reste 482. la valeur cherchée est donc 241 l. 5 s. 7 d.

Cette Methode est sans comparaison plus commode que celle des parties aliquotes; mais on peut la rendre encore plus aisée, & n'avoir dans l'operation que des nombres beaucoup plus petits à multiplier & à diviser, en partageant l'operation en deux. Il faut pour cela chercher à part la valeur de la grande espece, & chercher ensuite la valeur des petites especes, & ajoûter ensemble ces deux valeurs, pour avoir la valeur cherchée; ainsi dans l'exemple cy-dessus il faut chercher d'abord la valeur de 7 toises, en multipliant 30 liv. 7 s. 5 d. par 7. ce qui donne 210 liv. 49 s. 35 d. & par reduction 212 l. 11 s. 11 d. On cherchera ensuite la valeur de 5 pieds, 8 pouces, ou de 68 pouces, & pour l'avoir on multipliera 30 liv. 7 s. 5 d. ou par reduction 7289 d. par 68. & on divisera le produit 495652 d. par 72 pouces, & le quotient 6884 $\frac{4}{72}$ est le nombre des

deniers, que valent les 5 pieds, 8 pouces, je reduis en sols ces 6884 d. negligeant la fraction & divisant par 12. je trouve pour quotient 573 s. & 8 deniers de reste. Je reduis ces 573 s. en livres, en divisant par 20, ou (ce qui revient au même & est plus court,) tranchant le dernier chifre 3, & prenant la moitié du reste 57. Cette moitié est 28, & il reste un qui vaut 10 s. parce que c'étoit 57 dixaines de sols ou 570 sols que j'ay reduits en livres. La valeur des 5 pieds, 8 pouces est donc 28 l. 13 s. 8 d. & cette valeur étant ajoûtée à la valeur des 7 toises, c'est à dire à 212 l. 11 s. 11 d. La somme donne comme cy-dessus 241 liv. 5 s. 7 d.

La raison pourquoy on fait une operation à part sur la premiere & plus grande espece, c'est qu'il n'y a que cette seule espece qui soit indefinie de sa nature: le nombre des pieds est toûjours moindre que 6, le nombre des pouces est toûjours moindre que 12, de même que le nombre des lignes. Mais le nombre des toises peut augmenter à l'infini, il en est de même à proportion de tous les autres nombres complexes arithmetiques; le nombre des sols est toûjours moindre que 20, le nombre des deniers

est toûjours moindre que 12; le nombre des onces moindre que 8, &c. De cette seconde maniere le nombre à multiplier est toûjours plus petit qu'un nombre donné, au lieu que de l'autre maniere, il peut être indefiniment grand.

Il seroit encor plus commode de faire cette même multiplication à trois fois. 1°. En multipliant 30 liv. 7 s. 5 d. par 7 toises. 2°. en multipliant 68 pouces par 30 l. ou par 7200 d. & divisant le produit par 72. 3°. multipliant 68 pouces par 7 s. 5 d. ou par 89 d. & divisant le produit par 72. & ajoûtant ensuite ces trois valeurs ou produits, on aura la valeur ou le produit cherché.

Dans les divisions on neglige le reste des dernieres especes, parce qu'on les regarde comme indivisibles, & ces restes ne meritent pas qu'on y ait égard, s'il reste pourtant la moitié ou plus que la moitié du diviseur, on augmente ordinairement le quotient d'une unité, ou l'on subdivise encor cette derniere espece, par exemple le denier en 12. douziémes de denier, mais cette exactitude ne va jamais à 2 deniers de plus ou de moins sur deux operations, ce qui n'en vaut pas la peine.

Du Toisé.

Le toisé est la Methode d'operer sur les toises, pieds, pouces & lignes pour la mesure ou l'évaluation des longueurs, des surfaces & des soliditez des corps. L'Addition & la Soustraction n'ont rien de difficile, ni de different de ce qui a été dit dans les Chapitres precedens, mais la Multiplication & la Division sont differentes, en ce que les produits & les quotients changent de nature, & de rapport entre les especes, ce qui n'arrive pas dans les autres nombres complexes arithmetiques, qui n'expriment pas les dimensions des corps.

Il y a trois sortes de toises. 1°. La toise lineaire, par laquelle on mesure les longueurs seulement ou les largeurs des corps en ligne droite; cette toise se divise en 6 pieds, le pied en 12 pouces, le pouce en 12 lignes. 2°. La toise quarrée par laquelle on mesure toutes les surfaces, ou les aires des corps, & cette toise se divise en 36 pieds quarrez, & le pied en 144 pouces, & le pouce en 144 lignes quarrées. 3°. La toise cube par laquelle on mesure la masse ou la solidité des corps, & cette toise se divise en 216

pieds cubes, chaque pied en 1728 pouces, chaque pouce en 1728 lignes cubes.

On ne peut jamais avoir à multiplier que toise lineaire par toise lineaire, ce qui produit des toises quarrées, ou toises quarrées par toises lineaires, ce qui produit des toises cubes. Je ne parle pas de la multiplication des toises lineaires, quarrées, ou cubes par des nombres abstraits, ou par des nombres complexes d'un autre genre, comme par livres, sols & deniers, parce que je l'ay déja expliqué. Je ne parle pas non plus de la multiplication des toises lineaires par les toises cubes, ni de la multiplication des toises quarrées par des toises quarrées, ou par des toises cubes, ni de la multiplication des toises cubes par des toises cubes, parceque ces quatre especes de multiplication prises absolument sont réellement impossibles, & n'arrivent jamais dans la pratique. Elles peuvent pourtant avoir lieu dans des cas faits à plaisir, où ces produits doivent être divisez par d'autres quantitez.

Exemple.

De la multiplication des toises lineaires par les toises lineaires.

multipliez 50 toises, 4 pi. 8 pou. 7 lig.
par 40 toises, 5 pi. 7 pou. 6 lig.

Je fais cette operation à trois fois. 1°. Je multiplie les toises par les toises, 50 par 40. ce qui me donne 2000 toises quarrées que je garde à part.

2°. Je multiplie 4 pieds, 8 pouces, 7 lignes par 40 toises; le produit est 160 toises-pieds, plus 320 toises-pouces, plus 280 toises-lignes. Je multiplie aussi 5 pieds, 7 pouces, 6 lignes par 50 toises; le produit est 250 toises-pieds, plus 350 toises-pouces, plus 300 toises-lignes, j'ajoûte ces deux produits, la somme est 410 toises-pieds, plus 670 toises-pouces, plus 580 toises-lignes. Il faut réduire cette somme à son expression la plus simple, pour cela je divise 580 par 12. le quotient est 48, que j'ajoûte à 670, & il reste 4, que je garde à part. Je divise 670 + 48, ou 718 par 12. le quotient est 59 que j'ajoûte à 410, & il reste 10. que je garde aussi à part. Enfin je divise 410 + 59 ou 469 par 6, & j'ajoûte le quotient 78 au nombre des toises quarrées 2000, & il reste 1 que je garde aussi à part. J'ay donc pour la somme de ces deux produits partiaux 2078 toises, plus 1 toise-pied, plus 10 toises-pouces, plus 4 toises-lignes quar-

rées, & parce que chaque toises lineaires vaut 6 pieds, & chaque toise quarrée vaut 36 pieds quarrez, il est évident que chaque toise-pieds vaut 6 pouces quarrez : de même parce que chaque toise lineaire vaut 72 pouces, chaque toise-pouce vaut 72 pouces quarrez, & parce que chaque toise lineaire vaut 864 lignes, chaque toise-ligne vaut 864 lignes quarrées : d'ailleurs chaque pied quarré vaut 144 pouces, & chaque pouce vaut 144 lignes, donc chaque toise-ligne vaut 6 pouces quarrez, chaque toise-pouce vaut $\frac{1}{2}$ pied quarré, ou 18 pouces quarrez ; & chaque toise-pied vaut $\frac{1}{6}$ de toise, ou 6 pieds quarrez, d'où je conclus que 2078 toises, plus 1 toise-pied, plus 10 toises-pouces, plus 4 toises-lignes valent 2078 toises quarrées, plus 11 pieds quarrez + 24 pouces quarrez.

3°. Enfin je multiplie les pieds, les pouces & les lignes, reduits en lignes par les pieds, les pouces & les lignes reduits en lignes, 4 pieds, 8 pouces, 7 lignes valent 679 lignes, 5 pieds, 7 pouces, 6 lignes valent 810 lignes. Je multiplie 810 par 679. & je divise le produit 549990, par 144. le quotient est 3819 pouces quarrez, que j'ajoûte

aux 24 pouces quarrez cy-dessus; la somme est 3843 pouces quarrez, & il reste 54 lignes quarrées. Je divise 3843 par 144. le quotient est 26 pieds quarrez, que j'ajoûte aux 11 pieds quarrez cy-dessus; la somme est 37 pieds quarrez, ou 1 toise & 1 pied quarré, & il reste 99 pouces quarrez.

Le produit cherché est 2079 toises quarrées, plus 1 pied quarré, plus 99 pouces, plus 54 lignes.

Pour faire sans peine les divisions par 144 & par 12. il faut se servir des deux Tables suivantes, qui contiennent les neuf premiers produits de ces deux nombres.

Tables pour le toisé des surfaces.

1.	12	1.	144
2.	24	2.	288
3.	36	3.	432
4.	48	4.	576
5.	60	5.	720
6.	72	6.	864
7.	84	7.	1008
8.	96	8.	1152
9.	108	9.	1296

Pour multiplier des toises lineaires par

des toises quarrées, il faut suivre la même methode ; mais dans les reductions il faut se souvenir que 1 toise cube vaut 216 pieds cubes ; qu'un pied cube vaut 1728 pouces cubes, & qu'un pouce cube vaut 1728 lignes cubes.

Tables pour le toisé cube.

1.	216	1.	1728
2.	432	2.	3456
3.	648	3.	5184
4.	864	4.	6912
5.	1080	5.	8640
6.	1296	6.	10368
7.	1512	7.	12096
8.	1728	8.	13824
9.	1944	9.	15552

On pourroit aussi suppléer entierement par une Table à la troisiéme multiplication, qui est celle des petites especes par les petites especes, parce que cette multiplication n'a qu'un nombre de cas determiné, au lieu que les deux premieres multiplications en ont une infinité.



CHAPITRE VII.

De la Division des Nombres complexes Litteraux.

REGLE GENERALE.

1°. SI le Diviſeur eſt un nombre incomplexe Arithmetique ou litteral, il faut diviſer (ſuivant les Regles du Livre precedent) chaque partie du dividende par le diviſeur, & la ſomme des quotients donnera le quotient cherché.

2°. Si le diviſeur eſt un nombre complexe, & le dividende un nombre incomplexe, on écrit en forme de fraction le diviſeur ſous le dividende.

3°. Si le diviſeur & le dividende ſont chacun un nombre complexe, il faut ranger les parties du dividende & celles du diviſeur de maniere que les plus hautes puiſſances de la lettre principale de l'un & de l'autre ſoient les premieres de gauche à droite; on met enſuite les differens degrez de cette même lettre, chacun par ordre en diminuant, & ceux du diviſeur ſous ceux du dividende, qui les ſurpaſſent autant que la plus haute puiſ-

sance du dividende surpasse la plus haute puissance du diviseur. C'est ainsi à peu prés que dans la division numerique, on commence par écrire le premier chifre du diviseur, sous le premier, ou sous les deux premiers chifres du dividende, & qu'on écrit de suite les mille, les centaines, les dixaines, &c.

4°. On commence par diviser le signe par le signe. Si les signes sont semblables le quotient est +, si les signes sont differens le quotient est —.

5°. On divise ensuite le premier terme du dividende par le premier terme du diviseur suivant les Regles du Livre precedent, (car je suppose icy que le premier terme de l'un & de l'autre soit un nombre incomplexe) & on écrit le quotient comme premier quotient partial.

6°. On multiplie tout le diviseur par ce quotient partial, & on ôte le produit du dividende. Le reste sert de second ou de nouveau dividende partial.

7°. Si la plus haute puissance de la lettre principale du premier terme de ce nouveau dividende, est plus grande que la plus haute puissance de cette même lettre dans le diviseur, ou si elle est du moins égale, on divise comme auparavant le premier terme du dividende par

le premier terme du diviſeur, & on écrit le quotient comme ſecond quotient partial : on multiplie tout le diviſeur par ce ſecond quotient partial, & on ôte le produit du nouveau dividende, pour avoir un ſecond reſte & troiſiéme dividende, ſur lequel on opere de même juſques à ce qu'il ne reſte rien, ou que ce qui reſte ſoit une puiſſance plus petite que celle du diviſeur, alors la diviſion eſt finie; & on écrit en forme de fraction ce reſte comme numerateur, & le diviſeur comme denominateur.

Premier Exemple.

Il faut diviſer $12aa - 30a$ par 6.

divid. $+12aa - 30a \mid 2aa - 5a$ qu. cher.

diviſ. $+6 \quad +6$

Second Exemple,

Il faut diviſer $8aa$ par $3a + 5$

J'écris en fraction; $\dfrac{8aa}{3a+5}$, & c'eſt le quotient cherché.

Troiſiéme Exemple.

Il faut diviſer $\dfrac{+8aa + 2a - 15}{\text{par} \quad +4a - 5}$

Je

Je dis en $+ 8aa$ combien de fois $+ 4a$, il y eſt $+ 2a$. J'écris $+ 2a$ au quotient ; je multiplie tout mon diviſeur $+ 4a - 5$ par $+ 2a$; le produit eſt $+ 8aa - 10a$, que j'ôte du dividende $8aa + 2a - 15$, & il reſte $+ 12a - 15$. Je diviſe $+ 12a - 15$ par $+ 4a - 5$, & je dis en $+ 12a$ combien de fois $+ 4a$, il y eſt $+ 3$; j'écris $+ 3$ au quotient. Je multiplie tout mon diviſeur $+ 4a - 5$ par $+ 3$; le produit eſt $+ 12a - 15$, que j'ôte de $+ 12a - 15$; il ne reſte rien, & la diviſion eſt finie.

Operation.

dividende $+ 8aa + 2a - 15 \mid + 2a + 3.$

diviſeur $+ 4a - 5$
prod. à ôter $+ 8aa - 10a.$
premier reſte $+ 12a - 15$
& ſecond dividende.
diviſeur $+ 4a - 5$
ſecond prod. à ôter $+ 12a - 15$

dernier reſte 0. 0.

Quatriéme Exemple.

Il faut diviſer $49aa + 18 - 26a^3 -$

$27a$ par $3-2a$, j'arrange mon dividende & mon diviseur suivant l'ordre des exposans de la lettre a.

$$-26a^3+49aa-27a+18 \mid +13aa-5a+6$$

$-2a+3$ divis.

$-26a^3+39aa$ ôtez

reste $+10aa-27a$

diviseur $-2a+3$

ôtez $+10a-15a$

reste $-12a+18$

diviseur $-2a+3$

ôtez $-12a+18$

reste $0.$ $0.$

On peut abbreger l'operation en n'écrivant qu'une fois le diviseur sous le quotient, comme multiplicateur, & n'écrivant point le premier membre de chaque produit partial, parce qu'il est toûjours égal au premier membre du dividende partial qui luy répond.

Operation plus abbregée.

$-26a^3+49aa-27a+18 \mid +13aa-5a+6$

ôtez $+39aa$ divis. $-2a+3$
Premier reste $+10aa$
ôtez $-15a$
second reste $-12a$
ôtez $+18$

troisiéme reste $0.$

Cinquiéme Exemple.

Il faut diviser $81a^4 - 16b^4$ par $3a + 2b$.

Opération.

$+81a^4-16b^4 \mid +27a^3-18aab+12ab-8b^3$

d. $+3a+2b$
ôtez $81a^4+54a^3b$
reste $-54a^3b$
divis. $+3a+2b$
ôtez $-54a^3b-36aabb$
reste $+36aabb$
divis. $3a+2b$
ôtez $+36aab^2+24ab^3$
reste $-24ab^3-16b^4$
divis. $3a+2b$
ôtez $-24ab^3-16b^4$

reste $0.$ $0.$

Sixiéme Exemple.

Il faut diviser $27a^3 + 8b^3$ par $3a - 2b$

Operation abbregée.

$27a^3 + 0aab + 0ab^2 + 8b^3 \mid 9aa - 6ab - 4b^2$

divis. $3a - 2b$

Premier reste $- 18aab$.

second reste $- 12ab^2 + 8b^3$

troisiéme reste $+ 16b^3$

CHAPITRE VIII.

Remarques sur la Division.

1°. LOrs qu'il y a plusieurs lettres, soit dans le diviseur, soit dans le dividende, il n'y en a jamais qu'une sur laquelle on se regle pour l'arrangement des parties. C'est la même lettre dans tous les deux, & on l'appelle la lettre principale. Le choix en est arbitraire ; mais il vaut mieux choisir entre les lettres communes au dividende & au diviseur, celle dont les deux plus hauts exposans

dans l'un & dans l'autre different le moins entre eux ; & celle qui est le moins de fois au même degré plus haut dans le diviseur, parce qu'il y aura par là moins de divisions partiales à faire, & on verra plûtôt si la division se peut faire sans reste.

Exemples.

Il faut diviser $27a^5 + 18bb$ par $3aa + 2b$.
Je me regle par la lettre b,

$$18bb + 27a^5 \mid 9b - 13\tfrac{1}{2}aa$$

$$2b + 3aa$$
$$+ 27aab$$

reste $- 27aab$
$$2b + 3aa$$

second reste $+ 40\tfrac{1}{2}a^4$.

Et parce que ce second reste ne peut pas être divisé par $2b$, je conclus que la division exacte est impossible.

Si j'avois tenté la division en me reglant par la lettre a, j'aurois eu beaucoup plus d'operations à faire.

2°. En matiere de division litterale,

on conte pour rien les fractions numeriques ; & la division ne laisse pas d'être parfaite, quoy qu'il y ait des fractions dans les absolus. Ainsi en divisant $- 13a + 26$ par $- 2a + 4$, le quotient est $+ 6\frac{1}{2}$; & la division est parfaite, il ne faut donc pas dire ; en $- 13a$, combien de fois $- 2a$? il y est $+ 6$, comme dans la division numerique ; mais il y est $+ 6\frac{1}{2}$.

3°. On prend toûjours sans hesiter le plus grand quotient litteral qu'il est possible, & le tâtonnement n'a lieu que dans les absolus : en quoy la division litterale complexe differe essentiellement de la division numerique complexe. La raison est que la division purement-litterale se fait par une veritable & simple soustraction, & qu'il n'y a point de tâtonnement dans la soustraction.

4°. S'il y a des fractions numeriques ou litterales dans le diviseur ou dans le dividende, il faut les faire évanoüir par la multiplication, avant que de commencer la division. Par exemple, soit le dividende donné $- 13aa + \frac{5}{7}a - 3\frac{2}{3}$, & le diviseur $\frac{4}{5}a - 8\frac{3}{4}$. Je commence par faire évanoüir l'une aprés l'autre toutes ces fractions, en multipliant par le denominateur de chacune, tout le dividen-

de & tout le diviseur, par là je change l'expression de ces deux nombres sans en changer le rapport.

Pour faire évanoüir la fraction $\frac{5}{7}$ *a*, je multiplie tout par 7; & j'ay pour nouveau dividende — 91*aaa* + 5*a* — 25 $\frac{2}{3}$ & pour nouveau diviseur 5 $\frac{3}{5}$ *a* — 61 $\frac{1}{4}$.

Pour faire évanoüir la seconde fraction $\frac{2}{3}$; je multiplie tout par 3, & j'ay pour nouveau dividende — 273*aa* + 15*a* — 77. & pour nouveau diviseur 16 $\frac{4}{5}$. *a* — 183 $\frac{3}{4}$. pour faire évanoüir la 4eme fraction $\frac{4}{5}$; je multiplie tout par 5. &c. & je trouve enfin mon dividende & mon diviseur sans fractions.

divid. — 5460*aa* + 300*aa* — 1540.

divis. + 336*a* — 3675.

5°. Lors que les absolus sont fort grands, il faut faire la division numerique à part & rapporter ensuite le quotient numerique à sa place.

6°. Si le premier membre du diviseur & du dividende sont chacun un nombre complexe en se reglant par une certaine lettre principale, de sorte qu'on ne puisse pas trouver par une division simple le quotient partial, il faut changer de lettre principale ou subdiviser le dividen-

de, & diviseur partial jusques à ce qu'on ait un diviseur partial incomplexe.

Exemple.

Soit le dividende donné,

$$\begin{array}{rr} & +5bd^2a - f^2d^2. \\ +21ccaa & +8f^2ba \\ -40bbaa & +7f^2ca \\ -11bcaa & -3d^2ca \end{array}$$

Et le diviseur,

$$\begin{array}{rl} & 3ca + f^2 \\ - & 5ba \end{array}$$

En prenant pour lettre principale la lettre *a*, le premier membre du dividende est le nombre complexe $+21ccaa - 40bbaa - 11bcaa$. Et le premier membre du diviseur est le nombre complexe $3ca - 5ba$, il faudroit donc suivant la Regle generale dire en $21ccaa - 40bbaa + 11bcaa$, combien de fois $3ca - 5ba$? Mais parce qu'on ne peut pas trouver ce quotient par une division simple. J'examine si dans mon diviseur il n'y a point de lettre qui soit moins de fois au même degré que n'y est la lettre *a*, & je trouve que je puis prendre les lettres *b*, *c*, *f*, qui n'y sont chacune qu'une fois. Je me determine à prendre f^2, parce qu'il n'y a point d'absolu qui le multiplie, j'arrange

range mon dividende ſuivant cette lettre principale f, & j'ay à diviſer.

$$\begin{array}{ll} 8abf^2 & \\ +7acf^2 & +21aacc \\ -d^2f^2 & -40aabb \\ & -11aabc \\ & +5abd^2 \\ & -3acd^2. \end{array}$$

$$\text{par } +f^2 \quad \begin{array}{l} -5ab \\ +3ac \end{array}$$

Et je dis; en $8abf^2 + 7acf^2 - d^2f^2$; combien de fois f^2? il y eſt $8ab + 7ac - d^2$, & multipliant tout mon diviſeur par ce quotient, & ôtant le produit du dividende, il ne reſte rien, d'où je conclus que le quotient cherché, eſt $8ab + 7ac - d^2$

Ou bien gardant la même lettre principale a, j'aurois conſideré la diviſion partiale de $21ccaa - 40bbaa - 11bcaa$ par $3ca - 5ba$; comme une diviſion totale, & choiſiſſant pour lettre principale une des deux lettres b, c, qui ne ſe trouve qu'une fois dans le diviſeur $3ca - 5ba$; j'arrange mon dividende ſuivant la lettre c, & j'ay à diviſer.

$21aacc - 11aabc - 40aabb$ par $3ac - 5ab$, & je dis; en $+21aacc$

combien de fois $+ 3ac$? il y est $+ 7ac$, que j'écris au quotient, je multiplie tout mon diviseur $3ac - 5ab$ par ce quotient $7ac$, & ôtant le produit $21aacc - 35aabc$, du dividende, il reste $+ 24aabc - 40aabb$. Je dis; en $+ 24aabc$ combien de fois $+ 3ac$? il y est $+ 8ab$, que j'écris au quotient, je multiplie tout mon diviseur $3ac - 5ab$, par ce même quotient $+ 8ab$, & ôtant le produit du dividende, il ne reste rien; d'où je conclus que le quotient partial

de $21ccaa$ | divisé par $3ac - 5ab$.
$- 40bbaa$
$- 11bcaa$

Est $7ac + 8ab$, je multiplie par ce même quotient le reste de mon diviseur total $+ f^2$, & j'ôte le produit $7acf^2$
$+ 8abf^2$ du reste du dividende.

total $+ 5bd^2a$ & il reste pour
$+ 8f^2ba$
$+ 7f^2ca$
$- 3d^2ca$

Nouveau dividende $+ 5bd^2a - f^2d^2$
$- 3d^2ca$.

que j'arrange encore suivant la lettre c, & j'ay à diviser

$- 3ad^2c + 5abd^2$
$- f^2d^2$.

Par $3ac - 5ab$. & je dis, en $-3ad^2c$, combien de fois $+3ac$? il y eſt $-d^2$ que j'écris au quotient; & multipliant, &c. il ne reſte rien, d'où je conclus que le quotient cherché eſt $+8ab + 7ac - d^2$.

Toute l'adreſſe conſiſte donc à ſubdiviſer le dividende partial & le diviſeur partial, en ſorte que prenant une nouvelle lettre principale, le diviſeur partial ſoit un nombre incomplexe; & il n'importe que le dividende partial ſoit un nombre complexe ou incomplexe, parce que la difficulté de la diviſion à cet égard ne vient uniquement que du diviſeur.

Chapitre IX.

Regles pour éviter les Diviſions inutiles.

IL y a une infinité de cas où la diviſion eſt entierement inutile, lors qu'elle n'eſt pas exacte, & ſans reſte. Il eſt donc tres avantageux d'avoir des Regles pour s'épargner une operation ſi longue & ſi difficile, lors qu'on peut prévoir qu'elle ſera inutile. Et c'eſt à quoy je ſuis ſurpris qu'on ne ſe ſoit pas attaché.

Dans tout nombre complexe litteral il

y a cinq choſes à remarquer. 1°. Le nombre des termes. 2°. Les ſignes + & —. 3°. Les abſolus ou nombres connus. 4°. Les lettres. 5°. Les expoſans de ces lettres. De ces cinq choſes il n'y a que les abſolus pour leſquels on ne puiſſe pas donner de Regle generale, afin de connoître tout d'un coup, ſi la diviſion exacte eſt poſſible, ou non. Je ſuppoſe que le dividende & le diviſeur ſont arrangez, & ſans fractions.

1°. Si le nombre des termes eſt plus petit dans le dividende que dans le diviſeur, & qu'il y ait une ſeule lettre également élevée dans le diviſeur & dans le dividende, la diviſion eſt impoſſible. Par exemple ſoit le dividende $ba^3 + cd^3$ |

& le diviſeur $baa + cd^2 + acd$

Il eſt inutile de tenter cette diviſion. Car prenant cette lettre *b*, pour lettre principale (comme on le peut toûjours,) le quotient ſera un nombre incomplexe, & venant à multiplier mon diviſeur par ce quotient, & ôtant le produit qui a plus de parties que le dividende ; il y aura un reſte où la lettre principale ne ſe trouvera point, donc la diviſion exacte ſera impoſſible.

2°. S'il y a dans le diviſeur une ſeu-

le lettre qui ne soit pas dans le dividende, la division exacte est impossible. Par exemple

soit le divid. $8a^3b - 6aab^2 + 10d^3c$ |

& le diviseur $2aa - 3ab + 5fc$

Il est inutile de tenter cette division à cause de la lettre f, qui se trouve dans le diviseur, & qui n'est pas dans le dividende. Car quel que fût le quotient, en le multipliant par mon diviseur, la lettre f se trouveroit dans le produit, donc ce produit ne pourroit pas être égal & semblable au dividende, où cette lettre ne se trouve point ; donc la division exacte est impossible.

3°. Si tous les signes sont + dans le dividende, & qu'il y ait des + & des — dans le diviseur, la division exacte est impossible. Par exemple

soit le dividende $a^3 + b^3$ |

& le diviseur $a - b$

Il est inutile de tenter cette division. Car quel que fût le quotient, il y auroit des — dans le produit, donc &c.

5°. Si la même lettre se trouve également élevée dans tous les membres du dividende & du diviseur, il n'y a qu'à l'effacer dans l'un & dans l'autre, & con-

tinuer la division : que si la même lettre se trouve plus élevée dans le diviseur, le quotient peut être en fraction litterale & sans reste, & en ce cas la division ne laisse pas d'être exacte. Par exem.

$$\frac{8a^3b + 54b^2aa}{4a^5 + 27a^4b} \quad \frac{2b}{aa} \text{ quotient exact.}$$

Chapitre X.

Methode pour éviter toutes les fractions numeriques.

Les fractions numeriques qui viennent de la division des absolus, embarrassent extremement le calcul ; & dans les divisions composées, il devient entierement impraticable, même aux plus habiles Calculateurs. La Methode pour les éviter consiste à faire en sorte que le premier membre du diviseur n'ait pour absolu que l'unité. Car en ce cas il est évident qu'on ne peut avoir de fraction numerique, puisque l'unité en divisant ne change rien au dividende.

Je suppose qu'il faille diviser $8a^3 + 4a^2 - 9$ par $7a - 6$.

Je devrois suivant la Regle générale

dire d'abord en $8a^3$, combien de fois $7a$? mais parce que 7 n'eſt pas compris preciſément dans 8; j'ay pour quotient le nombre mixte $1\frac{1}{7}a^2$, par lequel il faudroit multiplier tout mon diviſeur, ce qui me donneroit une autre fraction à ſouſtraire; & dans la ſeconde diviſion partiale, il faudroit encore diviſer cette fraction par 7, & multiplier mon diviſeur par le quotient, qui ſeroit une fraction encore plus compoſée que la precedente; & ainſi de ſuite.

Pour éviter toutes ces fractions, je ſuppoſe que $7a$, premier membre de mon diviſeur ſoit égal à une autre lettre comme b, pour lors bb vaudra $49aa$, & b^3 vaudra $343a^3$. Par conſequent ſi je veux mettre b à la place de $7a$, dans mon diviſeur, & que je veuille mettre des bb, & des b^3 à la place des aa, & des a^3 dans mon dividende; il faut que je multiplie à proportion tous les termes de mon diviſeur, & tous ceux de mon dividende, excepté le premier terme de celui-cy.

Je mets donc $8b^3$ au lieu de $8a^3$, & il eſt évident que par ce changement de lettre, je multiplie le premier terme de mon dividende par 343; puiſque b^3 vaut $343a^3$. Mais en mettant $4bb$ à la place

de $4aa$, je ne multiplie ce second terme que par 49. donc afin de le multiplier autant que le premier terme, il faut que je multiplie l'absolu 4 par 7, & que j'écrive $28bb$. Enfin il faut que je multiplie le dernier terme du dividende, qui est — 9 par 343. & que j'écrive — 3087. J'auray donc pour diviseur preparé $b - 6$ & pour dividende preparé $8b^3 + 28bb - 3087$. Je fais là dessus ma division sans fraction, & je trouve pour quotient $bb + 76b + 45b - \frac{351}{b-6}$, & c'est le quotient cherché divisé par 343.

Je suppose qu'il faille diviser $52a^5 - 8a^3 + 4a - 9$. par $65aa + 7a - 6$. je devrois suivant la Regle générale, dire d'abord en $52a^5$ combien de fois $65aa$? ou simplement en 52. combien de fois 65? mais parce que 65 n'est pas compris precisément dans 52. Je suppose pour éviter les fractions que $65a$ est égal à b; donc suivant cette supposition bb vaudra $4225aa$, & b^3 vaudra $274625a^3$.

Par consequent si je veux mettre bb à la place de $65aa$ dans mon diviseur, & que je veuille mettre des b, des b^3 des b^5, à la place des a, des a^3, des a^5, dans le dividende & dans le reste

du diviseur ; il faut que je multiplie à proportion tous les termes de l'un & de l'autre.

$$65a = b$$
$$65$$
$$325$$
$$390$$
$$4225aa = bb$$
$$65$$
$$21125$$
$$25350$$
$$274625a^3 = b^3$$

Je mets donc $52b^5$, au lieu de $52a^5$, & il est évident que par ce changement de lettre, je multiplie le premier terme du dividende par la cinquiéme puissance de 65. c'est à dire par 4225 fois 274625. Mais en mettant $8b^3$, à la place de $8a^3$, je ne multiplie que par 274625. donc afin de multiplier ce second terme autant que le premier, il faut que je multiplie l'absolu 8 par 4225, & que j'écrive $33800b^3$ &c. Je trouve enfin pour diviseur preparé $bb + 7b - 390$, & pour dividende preparé $52b^5 - 33800b^3 + 71402500b - 1044.2615625$. Je fais là dessus ma division sans fractions & parce que le dividende a été multiplié par la cinquiéme puissance de 65, & que le diviseur n'a été multiplié que par

65. il faudra écrire sous le quotient comme denominateur la quatriéme puissance du même nombre 65. c'est à dire 17850625.

Pour éviter ces grandes multiplications, je suppose $65 = c$, & j'auray pour dividende preparé $52b^5 - 8ccb^3 + 4c^4b - 9c^5$ & pour diviseur preparé, $bb + 7b - 6c$.
& pour quotient $\frac{52b^3 - 364bb \; \&c.}{c^4}$

Il est aisé de former sur cet exemple la Regle générale, soit qu'il n'y ait qu'une lettre dans le premier terme du diviseur, soit qu'il y en ait plusieurs.

La Demonstration est évidente, supposé ce principe ; qu'en multipliant ou divisant par un même nombre, & le dividende & le diviseur, le quotient est toûjours le même. Par exemple, c'est la même chose de diviser 15 par 3 ; que de diviser 30 par 6. ou 60 par 12 ; le quotient est toûjours 5.

Pour conserver l'Analogie entre la division Arithmetique & la division litterale, & même pour éviter de se broüiller, il est avantageux de remplir par des o, les degrez vuides de la lettre principale dans le dividende & dans le divi-

seur. Ainsi au lieu d'écrire $52b^5 - 8ccb^3 + 4c^4b - 9c^5$. Il vaut mieux écrire $52b^5 + 0b^4 - 8ccb^3 + 0bb; - 4c^4b - 9c^5$. & au lieu d'écrire pour diviseur $b^3 + 7b - 10$; il vaut mieux écrire $b^3 + 0bb - 7b - 10$.

La lettre principale s'écrit toûjours la derniere dans chaque membre.

Lorsque la lettre principale se trouve plusieurs fois au même degré, on ne l'écrit qu'une fois en haut, & on écrit au dessous l'un aprés l'autre tous les multiplians avec leurs signes. Ainsi au lieu d'écrire $8abf^2 + 7acf^2 - d^2f^2$ on écrit

$$\begin{array}{l} 8abf^2 \\ + 7ac \\ - d^2. \end{array}$$

Si l'on a bien compris la Demonstration de la Regle touchant les signes + & — dans la multiplication, on n'aura aucune difficulté à comprendre, la Regle touchânt ces mêmes signes dans la division; car puisque + multiplié par — produit —, il est évident que — divisé par + doit donner — au quotient, & si — multiplié par — produit +. Il est évident que — divisé par + doit donner —, & que + divisé par — doit donner — au quotient, parce que le quotient étant multiplié par le diviseur, le produit

doit être égal & semblable au dividende.

CHAPITRE XI.

De la Division des Nombres complexes Arithmetiques.

IL faut partager également 30 liv. entre 8 personnes.

Je divise 30 par 8, le quotient est 3. & il reste 6. c'est à dire qu'il faut donner 3 liv. à chaque personne, & qu'il reste encore 6 liv. à partager en 8. Je reduis 6 liv. à l'espece immediatement plus petite, qui est les sols, & je divise 120 s. par 8. le quotient est 15. c'est à dire qu'il faut donner à chaque personne 3 liv. 15 sols.

Second Exemple.

Il faut partager 30 liv. à 9 personnes, le quotient est 3 liv. 6 s. 8 d.

Troisiéme Exemple.

Il faut partager 30 liv. à 7 personnes, le quotient est 4 liv. 5 s. 8 d. & il reste à partager 4 d. qu'on neglige.

Quatriéme Exemple.

On demande quel est l'interest de 300

liv. au denier 20, au denier 18, au denier 14. Par le denier 20 on entend la vingtiéme partie du capital 300. par le denier 18, on entend la dix-huitiéme partie du même capital, &c. donc il n'y a qu'à diviser 300 par 20, par 18, par 14 &c.

Au denier 20. c'est 15 liv.

Au denier 18. c'est 16 liv. 13 ſ. 4 d.

Au denier 14. c'est 21 liv. 8 ſ. 6 d. & il reste 12 d. à partager en 14. on les neglige, ou parce que 12 est plus de la moitié de 14. on écrit 21 l. 8 ſ. 7 d.

Cinquiéme Exemple.

L'année civile suivant la Reformation de Jules Cesar, & qu'on appelle à cause de cela l'année Julienne est de 365 jours & 6 heures. C'est pourquoy chaque quatriéme année est de 366 jours, & on l'appelle bissextille, à cause que les Romains contoient deux fois de suite le vingt-quatriéme jour de Février. *Sexto Cal. April. bis sexto Cal. April.*

Cette anne Julienne est un peu trop grande, & ne s'accorde pas avec le cours du Soleil. C'est pourquoy le Pape Gregoire XIII[eme]. reforma le Calendrier en 1582. & ordonna que sur 400 ans on

omettroit trois années bissextiles, Ainsi l'année 1600. étoit bissextile, mais les années 1700. 1800. 1900. ne le seront pas; l'année 2000. le sera; les années 2100. 2200. 2300. ne le seront pas; l'année 2400. le sera. On demande quelle est la grandeur de l'année Gregorienne?

Puisque sur 400 ans, il y en a 303 de 365 jours, & 97. de 366 jours. Il est évident que chaque année l'une portant l'autre, est de 365 jours, plus la 400eme partie de 97 jours. Je reduis 97 jours en heures, en multipliant 97 par 24. & je divise le produit 2328 par 400. le quotient est 5. nombre des heures, & il reste 328 heures, que je reduis en minutes, en multipliant 328 par 60; & je divise le produit par 400. le quotient est 49. nombre des minutes, & il reste 80 minutes, que je reduis en secondes, en multipliant 80 par 60. & je divise le produit 4800 par 400, le quotient est 12, nombre des secondes precisément, d'où je conclus que l'année Gregorienne est de 365 jours, 5 heures, 49 minutes, 12 secondes.

Sixiéme Exemple.

Ptolomée rapporte au Livre 4. chap. II.

de son Almageste que les Caldéens observerent une éclipse de Lune à Babylone le 26. du mois de Thoth, l'an 366 de Nabonnassar. Ce qui revient au 23. Decembre à 7 h. 20'. aprés minuit de l'année 383 avant J. C. Monsieur Gassendi observa une autre éclipse de Lune à Aix en Provence le 20. Janvier 1628. à 9 h. 36'. 30''. aprés midy.

Les reductions ordinaires étant faites on trouve que d'une éclipse à l'autre il y a 733805 jours, 17 h. 53'. 30''. qui répondent à 24849 mois Lunaires.

Il faut trouver la valeur d'un mois Lunaire, je divise 733805 par 24849. le quotient est 29. nombre des jours, & il reste 13184 jours, que je reduis en heures, en les multipliant par 24, & au produit 316416. j'ajoûte 17. à cause des 733805 jours, 17 heures; & je divise la somme 316433 par 24849, le quotient est 12. nombre des heures, & il reste 18245 heures, que je reduis en minutes, &c. Et je trouve que la valeur moyenne d'un mois Lunaire est d'environ 29 jours, 12 h. 44'. 3''.

Septiéme Exemple.

Il faut diviser 2079 toises quarrées, 1

pied, 99 pouces, 54 lignes; par 40 t. 5 pieds, 7 pouces, 6 lignes lineaires.

Reduiſez tout le dividende en lignes quarrées; & tout le diviſeur en lignes lineaires.

Diviſez enſuite les lignes quarrées par les lignes lineaires. Le quotient donnera le quotient cherché en lignes lineaires, que vous reduirez par la diviſion en pouces, en pieds & en toiſes; & vous trouverez pour quotient reduit 50 t. 4 pieds, 8 pouces, 7 lignes. Ou bien, appellez les toiſes a, les pieds b, les pouces c, les lignes d;

& diviſ. $2079aa + 1b^2 + 99c^2 + 54d^2$

par $40a + 5b + 7c + 6d$

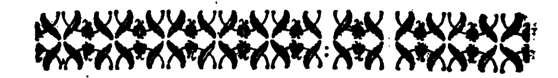
Dites en $2079aa$, combien de fois $40a$? il y eſt $51a$, & il reſte $49aa$; mais avant que d'écrire $51a$ pour quotient, je multiplie le reſte de mon diviſeur qui eſt $5b + 7c + 6d$ par $51a$: le produit eſt $255ab + 357ac + 306ad$, & parce que a vaut $6b$; & b vaut $12c$, & que c vaut $12d$; je reduis ce produit à ſa plus ſimple expreſſion, & je trouve qu'il vaut plus de $49aa + 1b^2$ &c. C'eſt pourquoy je n'écris au quotient que $50a$, & continuant de même, je trouve pour quotient

quotient 50*a* + 4*b* + 8*c* + 7*d*. C'eſt à dire 50 toiſes, 4 pieds, 8 pouces, 7 lignes.

On operera de même pour la multiplication & la diviſion des degrez, minutes, ſecondes, &c. par des degrez, minutes, ſecondes &c. en obſervant qu'un degré lineaire vaut 60 minutes lineaires; qu'un degré quarré vaut 3600 minutes quarrées, & qu'un degré cube vaut 216000 minutes cubes; & que chaque minute lineaire vaut 60 ſecondes, chaque minute quarrée vaut 3600 ſecondes quarrées, &c.

Il eſt fort inutile de s'exercer ſur cette derniere eſpece de calcul, parce qu'on n'en a jamais beſoin dans la pratique.





LIVRE TROISIE'ME,

DES FRACTIONS.

CHAPITRE I.

De la Reduction des Fractions à moindres termes.

LA Division imparfaite produit les fractions; quand je divise 47 par 15, le quotient est $3\frac{2}{15}$; ce $\frac{2}{15}$ est une fraction qui s'exprime ainsi *deux quinziémes*; le nombre 15, qui étoit le diviseur en nombres entiers, s'appelle en fraction *le dénominateur*, parce qu'il donne le nom à la fraction, ce sont *des quinziémes*.

Le nombre 2, qui étoit le reste de la division en nombres entiers, s'appelle en fraction *le numerateur*, parce qu'il marque le nombre de ces quinziémes, & qu'il y en a *deux*.

Ainsi $\frac{3}{5}$ s'exprime *trois cinquiémes*, c'est à dire trois fois la cinquiéme partie d'un certain tout; ou la cinquiéme partie de

trois touts. Les $\frac{3}{5}$ d'un écu de 60 ſols, c'eſt 3 fois la cinquiéme partie d'un écu; la cinquiéme partie d'un écu c'eſt 12 ſols, ainſi 3 cinquiémes valent 36 ſols; ou bien $\frac{3}{5}$ d'écu, c'eſt la cinquiéme partie de 3 écus, qui valent 180 ſ. & la cinquiéme partie de 180 ſ. eſt encore 36 ſols. Quand on diviſe 47 par 15; qu'on trouve pour quotient 3. & qu'il reſte 2; il eſt évident que l'eſprit de la diviſion va à prendre la quinziéme partie de ce reſte 2, & qu'ainſi on devroit exprimer la fraction $\frac{2}{15}$ par ces mots, *la quinziéme partie de deux.* Mais parce que la quinziéme partie de deux vaut évidemment deux fois la quinziéme partie d'un; il eſt certain qu'on peut auſſi exprimer cette fraction $\frac{2}{15}$ par ces mots *deux quinziémes*, en ſouſ-entendant le mot *d'un*, & cette derniere expreſſion a prévalu, comme plus courte.

Il y a deux ſortes d'operations ſur les fractions, il y a des operations qui leur ſont propres; & qui ſont compriſes ſous le mot de réduction, & il y a des operations qui leur ſont communes avec les nombres entiers. Ce ſont l'addition, la ſouſtraction, la multiplication & la diviſion.

Il n'y a que deux eſpeces de rédu-

ctions exactes ; la réduction à moindres termes, & la réduction à même dénomination.

Il y a deux réductions impropres ; la réduction à un dénominateur donné, & la réduction à un numerateur donné.

De la réduction à moindres termes.

IL y a cette difference entre les nombres entiers, & les fractions par rapport à l'expression, que chaque nombre entier a son expression particuliere, seule & unique, au lieu que chaque fraction peut, sans changer de valeur être exprimée d'une infinité de manieres differentes. Ainsi ce nombre *trois* ne peut être exprimé que par ce seul chifre 3, mais cette fraction un demi $\frac{1}{2}$ peut sans changer de valeur être exprimée par deux quarts $\frac{2}{4}$; par trois sixiémes $\frac{3}{6}$; par quatre huitiémes $\frac{4}{8}$, &c. Car il est évident qu'une fois la moitié de quelque tout que ce soit, est égale à deux fois le quart du même tout, puisque chaque quart est la moitié de la moitié, & une fois la moitié de quelque tout que ce soit, est égale à trois fois la sixiéme partie du même tout, puisque chaque sixiéme est le tiers de la moitié. Ainsi la

moitié d'un écu est 30 s. deux quarts d'un écu sont 30 sols, trois sixiémes d'un écu sont 30 sols, &c. Par la même raison cette fraction $\frac{3}{5}$ peut sans changer de valeur être exprimée par $\frac{6}{10}$; par $\frac{9}{15}$; par $\frac{12}{20}$ &c. Et generalement par toute fraction, dont le numerateur contiendra autant de fois 3, que le nominateur contiendra de fois 5. Ce que je démontre, ainsi soit la fraction quelconque $\frac{a}{b}$ & une autre $\frac{ac}{bc}$, dont le numerateur ac soit multiple du numerateur a par le nombre c, & le dénominateur bc soit multiple du dénominateur b, par le même nombre c.

Je dis que ces deux fractions sont de même valeur.

Soit la ligne A B, representant un tout quelconque, divisée en autant de parties égales aux points d, d, c, d, que le nombre b a d'unitez.

Je prens A c d'autant de parties égales

d d c d

A——|——|——|——|——B

E----|----|----|----|----F

d d c d

que le nombre *a* contient d'unitez; par consequent prenant AB pour l'unité, la ligne Ac represente la valeur de la fraction $\frac{a}{b}$.

		AB = 5.
a, 3.		Ac = 3
b, 5.		EF = 20
c, 4.		Ec = 12

Soit la ligne EF égale à la ligne AB, divisée en autant de parties égales aux points *d*, *d*, *c*, *d*, que le nombre *b* a d'unitez; & je prens Ec d'autant de ces parties égales que le nombre *a*, contient d'unitez; & je divise chaque partie égale comme Ed, *dd*, *dc*, *cd*, *db*, en autant de parties égales que *c*, contient d'unitez; par consequent la ligne EF representera le nombre bc, & Ec representera le nombre ac, donc prenant EF pour l'unité, la ligne Ec representera la fraction $\frac{ac}{bc}$; or Ec est égale à Ac, puisque par l'hypothese les lignes AB, EF sont égales, & que Ec contient autant de fois une certaine partie de EF, que Ac contient de fois la même partie d'AB; donc la fraction $\frac{ac}{bc}$ est égale à la fraction $\frac{a}{b}$ ce qu'il faloit démontrer.

De toutes ces expressions differentes

de la même fraction, la plus simple de toutes est celle où le numerateur & le dénominateur sont les plus petits qu'il soit possible. Par exemple de toutes ces expressions équivalentes, $\frac{2}{5}$ $\frac{6}{10}$ $\frac{9}{15}$ $\frac{12}{20}$ &c. La plus simple est $\frac{2}{5}$, l'esprit apperçoit plus aisément la valeur de cette premiere expression, & toutes les operations en sont plus courtes. On demande une methode pour réduire toute fraction proposée à son expression la plus simple, c'est à dire à ses moindres termes. J'ay besoin pour cela de quelques définitions.

Définitions.

1°. Un nombre en mesure un autre, lors qu'il est contenu precisément un certain nombre de fois dans cet autre. Ainsi 3 mesure 3, parce qu'il y est contenu une fois, & 3 mesure 6, parce que 3 est contenu 2 fois dans 6.

2°. Le nombre qui mesure s'appelle *partie* de celuy qu'il mesure, & cette partie prend son nom du nombre par lequel il le mesure, c'est à dire du nombre des fois qu'il est contenu precisément. Ainsi 3 est partie de 12: 3 mesure 12 par 4, ou est contenu 4 fois dans 12: 3 est le quart de 12.

3°. Le nombre qui eſt meſuré s'appelle *multiple*. Ainſi 12 eſt multiple de 3.

4°. *Nombre premier* eſt celuy qui n'eſt meſuré que par l'unité. (Car l'unité meſure tous les nombres.) Ainſi 2. 3. 5. 7. 11. 13. &c. ſont des nombres premiers.

5°. Nombres premiers entre eux ſont ceux qui n'ont point d'autre commune meſure que l'unité, 3 & 5 ſont premiers entre eux; 3 & 10. de même que 8 & 15 ſont auſſi premiers entre eux.

6°. *Nombre composé* eſt celuy qui eſt meſuré par quelqu'autre nombre que l'unité. 15 eſt un nombre composé, parce qu'il eſt meſuré par 3 & par 5.

Axiomes. Le nombre qui meſure le ſimple meſure auſſi les multiples.

Le nombre qui meſure les deux parties, meſure auſſi le tout.

Le nombre qui meſure le tout & le retranché, meſure auſſi le reſte. Si 7 meſure le tout 35 par 5, & ſi 7 meſure le retranché 21 par 3; 7 meſurera auſſi le reſte 14. par 5 — 3 ou 2.

7°. Une fraction reduite à moindres termes, eſt une fraction dont le numerateur & le denominateur ſont les plus petits qu'il ſoit poſſible $\frac{3}{5}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{8}{15}$, ſont des

des fractions reduites à moindres termes; mais $\frac{12}{20}$, $\frac{21}{70}$, $\frac{56}{105}$, sont des fractions qui ne sont pas reduites à moindres termes.

Regle générale.

DIvisez le denominateur par le numerateur, & le numerateur par le reste, & ce premier reste par le second, & le second reste par le troisiéme, &c. jusques à ce que vous trouviez un diviseur exact.

Si ce diviseur exact est l'unité, la fraction proposée étoit déja reduite à ses moindres termes.

Si ce diviseur exact est tout autre nombre, divisez par ce nombre le numerateur & le denominateur donnez; les deux quotients (qui seront toûjours exacts,) donneront le numerateur & le denominateur de la fraction reduite.

Exemple.

Soit la fraction $\frac{3}{15}$ proposée à reduire à moindres termes, je divise 15 par 3, le quotient est 5. donc 3 est un diviseur exact. Je divise 3 & 15 par 3. les quotients sont 1, & 5 j'écris $\frac{1}{5}$; c'est la fraction reduite.

Second Exemple.

Soit la fraction proposée $\frac{3}{5}$, je divise 5 par 3, le quotient est 1; & il reste 2, je divise 3 par 2, le quotient est 1, & il reste 1, diviseur exact; mais parce que c'est l'unité. Je conclus que la fraction proposée $\frac{3}{5}$ étoit déja réduite à ses moindres termes.

Troisiéme Exemple.

Soit la fraction proposée $\frac{21}{35}$.

Je divise 35 par 21. il reste 14; je divise 21 par 14. il reste 7, je divise 14 par 7, il ne reste rien; donc 7 est un diviseur exact. Je divise 21 par 7. le quotient est 3. je divise 35 par 7, le quotient est 5. j'écris $\frac{3}{5}$ c'est la fraction réduite.

Quatriéme Exemple.

Soit la fraction proposée $\frac{112}{259}$.

Je divise 259 par 112. il reste 35; je divise 112 par 35, il reste 7; je divise 35 par 7, il ne reste rien, d'où je conclus que 7 est un diviseur exact, & la plus grande commune mesure de 112; & de 259. Et les divisant l'un & l'autre par 7, les quotiens sont 16 & 37. j'écris $\frac{16}{37}$. C'est la fraction réduite.

Cinquiéme Exemple.

Soit la fraction proposée $\frac{ac}{bc}$.

J'efface les lettres communes au numerateur & au denominateur, & qui s'y trouvent dans le même degré. La fraction réduite est $\frac{a}{b}$.

$\frac{21a}{35}$ se réduit à $\frac{3a}{5}$, & $\frac{21a}{35b}$ à $\frac{3a}{5b}$

Sixiéme Exemple.

Soit la fraction proposée $\frac{21a^3b}{35a^5}$

J'efface a^3 de part & d'autre &c. La fraction réduite est $\frac{3b}{5aa}$.

$\frac{21a^5c}{35a^3b}$ se réduit à $\frac{3a^2c}{5b}$

Septiéme Exemple.

Soit la fraction proposée,

$$\frac{21aa + 26a - 15}{28aa + 2a - 6}$$

Je divise $28aa + 2a - 6$ par $21aa + 26a - 15$, & negligeant le quotient

exact $+ 1$, je prens le reste $7aa - 24a + 9$, par lequel je divise le numerateur $21aa + 26a - 15$. & negligeant le quotient $+ 3a$, je prens le reste $+ 98a - 42$, par lequel je divise le premier reste $7aa - 24a + 9$. & negligeant le quotient $+ \frac{1}{14}a$, (que je trouve en réduisant la fraction simple $\frac{7aa}{98a}$ à ses moindres termes,) je prens le reste $- 21a + 9$, par lequel je divise le second reste, $+ 98a - 42$. & negligeant le quotient $- 4$. (que je trouve en divisant $+ 98$ par $- 21$;) je prens le reste $+ 14a - 6$, par lequel je divise le reste precedent $- 21a + 9$. le reste est $- 7a + 3$, qui divise exactement le reste precedent $+ 14a - 6$ par $- 2$. d'où je conclus que $- 7a + 3$ est la plus grande commune mesure du numerateur & du denominateur de la fraction proposée. C'est pourquoy je les divise l'un & l'autre par $- 7a + 3$. & je trouve pour fraction réduite $\frac{3a + 5}{4a + 2}$ sur quoy il faut remarquer que $- 7a + 3$. est le même nombre que $7a - 3$ avec un signe contraire, & que parce que $-$ divisé par $-$ donne $+$ de même que $+$ divisé par $+$, Le quotient est toûjours le

même, lors qu'on change tous les ſignes du diviſeur & du dividende, & que quand on diviſe une fraction, c'eſt la même choſe de diviſer le numerateur & le denominateur par un nombre poſitif, ou de les diviſer par le même nombre negatif. Ainſi en diviſant par $-7a+3$, on trouve pour quot. $\frac{-3a-5}{-4a-2}$

qui eſt la même choſe que $\frac{+3a+5.}{+4a+2.}$

Il eſt plus commode & plus naturel de rendre poſitif le premier terme du diviſeur.

Demonſtration de la Regle.

J'ay démontré cy-deſſus que toutes les fractions dont les numerateurs & les denominateurs étoient également multiples, ou équimultiples d'un même nombre, j'ay démontré, dis-je, que toutes ces fractions étoient de même valeur, d'où il s'enſuit évidemment qu'une fraction réduite à ſes moindres termes, eſt une fraction dont le numerateur & le denominateur ſont premiers entre eux.

Il faut que je prouve premierement qu'en ſuivant la Regle, on diviſe le numerateur & le denominateur par leur

plus grande commune mesure, & que par consequent les quotients sont des nombres premiers entre eux.

1°. Si le numerateur *a*, mesure le de-
a = 3. nominateur *b*, il est évident que
b = 15. *a* étant la plus grande mesure
de luy-même, il est aussi la plus grande commune mesure d'*a*, & de *b*.

2°. Si *a* ne mesure pas *b*, mais que
a = 15 le reste *c* mesure *a*, je dis que
b = 20 *c* sera la plus grande commune
c = 5 mesure d'*a* & de *b*. Car 1°. puis-
d = .. que *c* mesure *a*, il mesurera tous
les multiples d'*a*, si 2 mesure 6, 2 mesurera 12, 18, 24, &c. Or il se mesure aussi luy-même donc *c* mesurera *b*, qui n'est que la somme d'un multiple d'*a*, ajoûté à *c*. 2°. *c* est la plus grande commune mesure d'*a* & de *b*, car soit s'il est possible un autre nombre *d* plus grand que *c*, & commune mesure d'*a* & de *b*. Puisque *d* mesure *a* & ses multiples, & qu'il mesure *b*, il mesurera aussi le reste *c*, c'est à dire qu'un nombre en mesurera un plus petit; ce qui est absurde, donc *c* est la plus grande commune mesure d'*a* & de *b*.

3°. Si *a* ne mesure pas *b*, & que le reste *c* ne mesure pas *a*, mais que le second reste *d*, mesure le premier re-

ste c; je dis que d est la plus grande commune mesure d'a & de b. Car 1°. puisque d mesure c & ses multiples, & qu'il se mesure luy-même, il mesurera aussi le nombre a, qui n'est que la somme d'un multiple de c, ajoûté à d; & puisque d mesure a & ses multiples, & qu'il mesure c, il mesurera aussi le nombre b, qui n'est que la somme d'un multiple d'a ajoûté à c. 2°. d est la plus grande commune mesure d'a & de b; car soit s'il est possible un autre nombre e plus grand que d, &c. On prouvera que e mesureroit d, ce qui est absurde; & ainsi de suite, donc on trouve par la Regle la plus grande commune mesure; que si cette plus grande commune mesure est l'unité, les nombres a & b, sont premiers entre eux suivant leur definition.

$a = 15$
$b = 21$
$c = 6$
$d = 3$
$e = \ldots$

Cette Demonstration est plus simple & plus propre au sujet que celle qu'on tire des deux premieres propositions du septiéme Livre d'Euclide, parce qu'Euclide suppose qu'on opere par soustraction, au lieu que je suppose qu'on opere (comme on le fait effectivement) par division.

Il est évident par là que la fraction

$\frac{a}{b}$, où a & b sont premiers entre eux, est plus simple que toute autre fraction équivalente $\frac{ac}{bc}$, où le numerateur & le denominateur sont nombres composez entre eux. Mais cela ne suffit pas pour démontrer qu'on a réduit la fraction à ses moindres termes, c'est à dire aux plus petits nombres qu'il soit possible, si l'on ne démontre encore qu'il est impossible qu'il y ait une autre fraction équivalente $\frac{c}{d}$, où c & d soient plus petits que a & b; il faut aussi que c & d soient premiers entre eux, puis qu'on suppose que la fraction $\frac{c}{d}$ est la plus petite qu'il soit possible.

Il ne suffit pas par exemple de démontrer que la fraction $\frac{8}{15}$ est équivalente à la fraction proposée $\frac{56}{105}$, & que 8 & 15 sont premiers entre eux; il faut encor démontrer que toute autre fraction plus petite & primitive comme $\frac{7}{13}$ ne peut être équivalente à la fraction primitive $\frac{8}{15}$. Pour le démontrer j'ay besoin de quelques proprietez des nombres proportionnaux, & à cette occasion je vais donner dans le Chapitre suivant tout ce qui est necessaire à savoir dans

les proportions, & je le démontreray d'une maniere nouvelle, & par la seule expression des nombres.

Chapitre II.

Des Raisons & des Proportions.

Definitions.

1°. Le rapport, ou la raison du nombre a au nombre b, est la grandeur du nombre a, comparée à la grandeur du nombre b, entant que a contient b ou une certaine partie aliquote de b.

Ce rapport ou cette raison s'exprime par cette fraction $\frac{a}{b}$. Car pour trouver combien de fois b est contenu dans a, il est évident qu'il faut diviser a par b, & que le quotient qui est la fraction $\frac{a}{b}$, exprime la maniere dont b est contenu dans a, & par consequent le rapport de a à b. il faut remarquer que a peut être égal à b: que a peut être plus grand ou plus petit que b.

Dans le premier cas la fraction $\frac{a}{b}$ vaut 1, dans le second elle vaut un nom-

bre entier ou un nombre mixte; dans le troisiéme elle vaut une fraction.

Ainsi si *a* est égal à 6 (ce que j'exprimeray d'orénavant par ce caractere = c'est à dire par deux petites lignes paralleles, qui marquent l'égalité entre deux nombres complexes ou incomplexes) si $a = 6$ & $b = 2$, le rapport de *a* à *b* s'exprime par cette fraction $\frac{6}{2}$, c'est à dire par 3, & on dit que *a* est triple de *b*.

Si l'on suppose au contraire que $a = 2$ & $b = 6$, le rapport de *a* à *b* s'exprime par cette fraction $\frac{2}{6}$ ou $\frac{1}{3}$, & on dit que *a* est le tiers de *b*.

Si $a = 5$ & $b = 3$ l'exposant du rapport est $\frac{5}{3}$, ou le nombre mixte $1\frac{2}{3}$; c'est à dire que *a* contient 5 fois le tiers de *b*, ou qu'il le contient une fois & encore ses deux tiers; de même si $a = 13$ & $b = 5$, l'exposant du rapport d'*a* à *b* est $\frac{13}{5}$ ou $2\frac{3}{5}$. & au contraire si $a = 3$ & $b = 5$ l'exposant du rapport est $\frac{3}{5}$. Et si $a = 6$ & $b = 10$ l'exposant du rapport seroit encor $\frac{3}{5}$, qui est équivalent à $\frac{6}{10}$; c'est à dire que 6 contient 3 fois la cinquiéme partie de 10, qui est 2.

2°. Le premier nombre que l'on compare, ou le premier terme d'un rapport ou d'une raison s'appelle *l'antecedent*.

3°. Le ſecond nombre auquel l'on compare, ou le ſecond terme s'appelle le *conſequent*.

Ainſi quand je conſidere le rapport d'*a* avec *b*, *a* eſt l'antecedent, & *b* le conſequent.

4°. Proportion eſt une égalité de rapport, s'il y a même rapport du nombre *a* au nombre *b*, que du nombre *c* au nombre *d*, il y a proportion entre ces quatre nombres, ce qui s'exprime ainſi; *a* eſt à *b*, comme *c* eſt à *d*, ou plus ſimplement de cette maniere *a*. *b* : *c*. *d*, & ces quatre nombres ſont proportionnaux.

6. 3 : 8. 4.
3. 6 : 4. 8.
5. 3 : 10. 6 ſont des nomb. proport.
3. 5 : 6. 10.

Il s'enſuit de ce que nous avons dit cy-deſſus, que lors que les quatre nombres *a*, *b*, *c*, *d*, ſont proportionnaux les deux fractions $\frac{a}{b}$ $\frac{c}{d}$, ou les fractions $\frac{b}{a}$, $\frac{d}{c}$ ſont égales ou équivalentes, & reciproquement que lors que les fractions ſont égales, les nombres ſont proportionnaux.

Demande. Un nombre quelconque étant exprimé par une lettre comme *a*,

tout autre nombre, *b* peut être exprimé par la même lettre *a*, multipliée par une troisiéme lettre *c*, qui exprime le rapport de *b* à *a*, c'est à dire que supposant $\frac{b}{a} = c$, on aura le nombre $b = ca$. Ce qui est évident en multipliant l'un & l'autre par *a*. Car toute fraction multipliée par son denominateur produit son numerateur en entiers; puisque la fraction n'est autre chose que ce numerateur divisé par le denominateur, & que divisant & ensuite multipliant par le même nombre, on ne change rien au nombre multiplié & divisé; *c* peut être ou l'unité, ou un nombre entier, ou une fraction, ou un nombre mixte, selon les rapports differens du nombre *a* au nombre *b*.

Premiere consequence.

Si $a . b : c . d$. 6. 2 : 12. 4.
donc $b . a : d . c$. 2. 6 : 4. 12.

Cela est évident par l'idée même de la proprotion. Car si *a* contient *b*, comme *c* contient *d*, il est évident que *b* est contenu dans *a*, de même que *d* est contenu dans *c*, donc les fractions $\frac{a}{b}$ $\frac{c}{d}$ & les fractions $\frac{b}{a}$ $\frac{d}{c}$ sont égales, donc

$b. a : d. c.$ Si a eſt triple de b, & c triple de d, il eſt évident que b eſt le tiers d'a, & d le tiers de c. Et qu'il y a même rapport entre un tiers & ſon tout, qu'entre un autre tiers & ſon tout.

Ce raiſonnement s'appelle *en renverſant* en Latin *invertendo*.

Seconde conſequence

Si $a. b : c. d.$ 6. 2 : 12. 4.
donc $a. c : b. d.$ 6. 12 : 2. 4.
ſoit $\frac{b}{a} = e$ donc $\frac{d}{c} = e$ donc $b = ea$, donc $d = ce$. Or $a. c : ea. ec$, puis que les deux fractions $\frac{a}{c}$, $\frac{ea}{ec}$ ſont équivalentes. Ce raiſonnement s'appelle *alternando*.

Troiſiéme conſequence.

Si $a. b : c. d.$ 6. 2 : 12. 4.
donc $ad = bc$. C'eſt à dire que le produit des extremes eſt égal au produit des moyens. 6 fois 4 = 2 fois 12 = 24. Car ſoit $\frac{b}{a} = e$ donc $\frac{d}{c} = e$ donc $b = ea$, donc $d = ec$. C'eſt à dire que $a. ea : c. ec$, or le produit du premier nombre a, par le quatriéme ec eſt aec, & le produit du ſecond ea par le troi-

siéme *c*, est encor *aec*, donc ces deux produits sont égaux.

COROLLAIRE.

Trois nombres étant donnez on trouvera le quatriéme proportionnel. En multipliant le second par le troisiéme, & divisant le produit par le premier. Car puisque ce quatriéme étant multiplié par le premier doit faire un produit égal au produit du second par le troisiéme, il est évident que si le produit du second par le troisiéme est divisé par le premier, le quotient sera le nombre cherché.

30 hommes depensent 50 francs, combien depenseront 45 hommes? je multiplie 45 par 50, ou 50 par 45, & je divise le produit 2250 par 30, le quotient 75 est le nombre cherché.

C'est ce qu'on appelle *la Regle de trois*, à cause qu'il y a trois nombres ou trois termes donnez, & qu'on cherche le quatriéme. On l'appelle aussi *la Regle d'or*, à cause de son utilité.

On peut démontrer cette Regle plus simplement, en mettant l'unité pour premier terme. Par exemple si un homme seul depensoit 50 francs, il est évident que 45 hommes en depenseroient 45 fois 50, ou 2250. Mais puisque ce n'est

pas un homme seul qui depense 50 francs, mais que c'est 30 hommes; il est évident que chaque homme ne depense que la trentiéme partie de 50 francs, & par consequent 45 hommes ne depenseront que la trentiéme partie de 2250 francs. Il faut donc diviser 2250 produit du second terme par le troisiéme, il faut dis-je diviser 2250 par le premier terme 30. donc &c. ce qu'il falloit démontrer.

Dans l'application qu'on peut faire de cette Regle aux choses sensibles le premier terme, & le troisiéme sont toûjours de même nature, de même que le second & le quatriéme. Et l'on conclut ordinairement du plus au plus, & du moins au moins, comme il est aisé de le remarquer dans l'exemple cy-dessus. Mais si par la nature de la question on étoit obligé de conclure du plus au moins, & du moins au plus, il faudroit multiplier le premier terme par le second, & diviser le produit par le troisiéme. C'est ce qu'on appelle la Regle de trois *inverse*. Par exemple 30 hommes sont 50 jours à faire un ouvrage, combien de jours seront 45 hommes à faire le même ouvrage. Par la nature de la question il est évident que plus le troisiéme ter-

me est grand, plus le quatriéme qu'on cherche doit être petit; Car plus il y a d'ouvriers, moins ils doivent être de tems à faire le même ouvrage. C'est pourquoy je multiplie le premier terme 30 par le second 50, & je divise le produit 1500 par 45, le quotient $33\frac{1}{3}$ est le nombre des jours, ou le quatriéme terme cherché. On peut démontrer cette Regle en mettant l'unité pour troisiéme terme. Si 30 hommes sont 50 jours à faire un ouvrage, il est évident qu'un homme seul y seroit 30 fois 50 jours ou 1500 jours, donc 45 hommes n'y seront que la quarante-cinquiéme partie de 1500 jours, &c.

Quatriéme consequence.

Si $a . b : c . d$. $8 . 3 : 16 . 6$.
donc $a + b . b : c + d . d$.

Car soit $\frac{a}{b} = e$, donc $a = be$ & $a + b = be + b$, donc $\frac{c}{d} = e$ & $c = de$, & $c + d = de + d$.

Or $\frac{be + b}{b} = e + 1$. $\frac{de + d}{d} = e + 1$. donc $be + b . b : de + d . d$. ou $a + b . b : c + d . d$. ce qu'il falloit démontrer.

Ce

Ce raisonnement s'appelle *en composant* en Latin *componendo*.

On se seroit exprimé plus exactement si l'on avoit dit, donc *en ajoûtant* ou *addendo*.

On peut rendre cette consequence plus générale & plus utile en ajoûtant à l'antecedent a, tout multiple du consequent b comme fb. & à l'antecedent c tout multiple semblable du consequent d, comme fd. Car suivant le même raisonnement $a+fb.\ b : c+fd.\ d$. soit $\frac{a}{b} = e$ & $\frac{c}{d} = e$ donc $\frac{be+fb}{b} = e+f$ & $\frac{de+fd}{d} = e+f$. donc &c. Et ce raisonnement s'appelleroit, *en multipliant & ajoûtant.*

Cinquiéme consequence.

Si $a.\ b : c.\ d$. Si $8.\ 3 : 16.\ 6$. & que b soit plus petit que a.

Donc $a-b.\ b : c-d.\ d$. donc $5.\ 3 : 10.\ 6$. Car soit $\frac{a}{b} = e$, on trouvera que $\frac{a-b}{b} = e-1$. & que $\frac{c-d}{d} = e-1$. donc $a-b.\ b : c-d.\ d$. Ce raisonnement s'appelle *en divisant.*

On se seroit exprimé plus exactement, si

l'on avoit dit, donc *en ôtant* ou *subtrabendo*.

On peut rendre cette consequence plus générale & plus utile, en ôtant du nombre a tout multiple du consequent b comme fb, plus petit que a, & en ôtant de c tout multiple semblable de d, comme fd. On trouve le plus grand multiple en divisant a par b. Car suivant le même raisonnement $a - fb.\ b : c - fd.\ d.$ 8 — 6. 3 : 16 — 12. 6.

2. 3 : 4. 6.

Soit $\frac{a}{b} = e$. donc $\frac{a - fb}{b} = e - f$ & $\frac{c - fd}{d} = e - f$. donc &c.

Sixiéme consequence.

Si $a.\ b : c.\ d.$ 8. 3 : 16. 6.
donc $a.\ a - b : c.\ c - d.$ donc 8. 5 : 10. 6.
Ce raisonnement s'appelle *convertendo*, & se démontre precisément comme le precedent.

COROLLAIRE.

Deux fractions primitives ne sont pas de même valeur, c'est ce qui manquoit à la Demonstration de la Regle pour réduire les fractions à moindres termes. $\frac{8}{15}$ est une fraction primitive, où 8 & 15

sont premiers entre eux. Je dis qu'il est impossible de trouver une autre fraction primitive comme $\frac{7}{13}$ qui soit plus petite, & la plus petite qu'il soit possible ; & de même valeur que $\frac{8}{15}$. Car si $\frac{7}{13} = \frac{8}{15}$ donc 15 . 13 : 8 . 7. *& dividendo* 2 . 13 : 1 . 7. *alternando* 2 . 1 : 13 . 7. donc $\frac{1}{2} = \frac{7}{13}$ or la fraction $\frac{1}{2}$ est plus petite que la fraction $\frac{7}{13}$, donc la fraction $\frac{7}{13}$ n'est pas la plus petite qu'il soit possible, contre l'hypothese ; donc $\frac{8}{15}$ est la plus petite qu'il soit possible. Soit la fraction primitive $\frac{a}{b}$, je dis que toute autre fraction primitive $\frac{c}{d}$ est, ou plus grande ou plus petite. Car si elles étoient égales, *d* seroit à *b* comme *c* à *a* ; mais *d* n'est pas multiple de *b*, ni *c* multiple d'*a*, autrement la fraction $\frac{c}{d}$ ne seroit pas primitive ; donc ôtant *b* autant de fois qu'il est possible du nombre *d*, le reste $d - fb$ sera plus petit que *b*, & de même le reste $c - fa$ sera plus petit que *a*. Soit $d - fb = e$ & $c - fa = g$. donc par la deuxiéme & quatriéme consequence la fraction $\frac{g}{e}$ seroit équivalente à la fraction $\frac{a}{b}$, & elle est plus petite en expression,

puisque e est plus petit que b, & g plus petit que a, Or la fraction $\frac{g}{e}$ est primitive ou elle ne l'est pas. Si elle est primitive on trouvera par la même methode une quatriéme fraction équivalente & plus petite en expression, & ainsi de suite à l'infini, ce qui est absurde. Si la fraction $\frac{g}{e}$ n'est pas primitive, soit trouvée par la methode du Chapitre I. sa primitive $\frac{h}{i}$, qui sera encore plus petite en expression que $\frac{g}{e}$, donc on trouvera entre les deux fractions primitives $\frac{g}{e}$ & $\frac{h}{i}$ une autre fraction équivalente & plus petite en expression que $\frac{h}{i}$, & ainsi de suite à l'infini, ce qui est absurde. Car on ne peut pas trouver une infinité de nombres entiers plus petits que les nombres donnez a & b; donc deux fractions primitives ne peuvent pas être égales, & toute fraction primitive est réduite à ses moindres termes. Ce qu'il faloit démontrer; donc si de deux fractions égales $\frac{a}{b}$ $\frac{c}{d}$, la fraction $\frac{a}{b}$ est primitive, a mesurera c, & b mesurera d.

Septiéme conſequence.

S'il y a deux rangées de nombres.

a.	*b.*	*c,*	*d,*	*e,*	&c.
30.	20.	25.	50.	45.	
f.	*g,*	*h,*	*i,*	*k.*	&c.
12.	8.	10.	20.	18.	

& que *a. b : f. g.*
b. c : g. h.
c. d : h. i.
&c. &c.

Je dis que tel nombre qu'on voudra de la premiere rangée eſt à tel autre nombre qu'on voudra de la même rangée, comme le nombre correſpondant dans la ſeconde rangée eſt au nombre correſpondant de la ſeconde rangée.

a. e : f. k.
a. d : f. i.
b. d : g. i.

Car je puis exprimer univerſellement ces deux rangées de cette maniere.

a. am. amn, amno, amnop, &c.
f. fm. fmn, fmno, fmnop, &c.

Or *a. amnop : f. fmnop.*
a. amno : f. fmno.
am. amno : fm. fmno.

Donc par l'expreſſion ſeule, qui con-

tainement est arbitraire, je démontre d'une maniere beaucoup plus générale qu'Euclide, les consequences qu'on tire en matiere de proportions par *égalité reglée* ou *ex æquo ordinata*.

Huitiéme consequence.

S'il y a deux rangées de nombres.

	a, b, c, d, e, &c.	
	f, g, h, i, k, &c.	30.20.25.50.45.
		12, 15, 10, 9, 18.
& que	*a. b : g. h.*	30. 20 : 15. 10.
	b. c : f. g.	20. 25 : 12. 15.
	c. d : i. k.	25. 50 : 9. 18.
	d. e : h. i.	50. 45 : 10. 9.
	&c. &c.	&c. &c.
Je dis que	*a. c : f. h.*	30. 25 : 12. 10.
	a. e : f. k.	30. 45 : 12. 18.
	c. e : h. k.	25. 45 : 10. 18.

Car on peut exprimer universellement ces deux rangées de cette maniere.

a, am, amn, amno, amnop, &c.

f, fn, fnm, fnmp, fmnop, &c.

Or il est évident que

a. amn : f. fmn.

a. amnop : f. fmnop.

amn. amnop : fmn. fmnop.

C'est ce qu'on appelle conclure par *égalité troublée*, ou *ex æquo perturbata*.

Chaque terme impair d'une rangée est à chaque terme impair de la même rangée, comme les termes impairs correspondans de l'autre rangée sont entre eux.

Cette Demonstration est plus générale & plus simple que celle d'Euclide.

CHAPITRE III.

Methode nouvelle pour réduire une fraction à ses moindres termes, sans diviser le numerateur & le dénominateur par leur plus grande commune mesure.

SOit la fraction proposé à réduire $\frac{368}{851}$.

Operation.

851	2	37.
368	3	16.
115	5	
23	1	

Je divise 851 par 368, le quotient est 2, que j'écris, & il reste 115.

Je divise 368 par 115, le quotient est 3, que j'écris, & il reste 23.

Je divise 115 par 23, le quotient est 5 precisément, & 23 est la plus grande commune mesure, vis-à-vis de laquelle j'écris toûjours 1 au rang des quotients.

Je dis ensuite 3 fois 5 font 15, & 1 font 16, que j'écris vis-à-vis du quotient 3.

Je dis encore 2 fois 16 font 32, & 5 font 37.

La fraction réduite est $\frac{16}{37}$.

Car divisant 23 par luy-même le quotient est 1. & divisant 115 par 23, le quotient est 5. donc divisant 368, qui est égal à 3 fois 115, + 23. en le divisant dis-je par 23, le quotient sera 3 fois 5 + 1 ou 16. & en divisant 851. = 2 fois 368, + 115 par 23, le quotient sera 2 fois 16, + 5 = 32 + 5 = 37. & ainsi des autres.

Cette Regle est incomparablement plus courte que la Regle ordinaire, lors que les quotients sont petits, & que la plus grande commune mesure est un grand nombre, parce qu'on s'épargne deux grandes divisions, à la place desquelles on ne fait que quelques petites multiplications & additions.

On peut aussi réduire peu à peu la fra-

ction

ction proposée à ses moindres termes de cette maniere.

Si le numerateur & le dénominateur sont des nombres pairs, on les divise l'un & l'autre par 2, & encore par 2, jusques à ce que tous les deux quotients, ou l'un des deux soit impair. Aprés quoy on tente la division par 3, puis par 5, par 7, &c. Et de même continuellement par la suite des nombres premiers, jusques à ce que les deux quotients soient premiers entre eux. Ce que l'on connoîtra, lors que l'un des deux sera nombre premier, ou que des nombres premiers qui mesurent l'un des deux quotients, aucun ne mesure l'autre. Ces derniers quotients seront la fraction réduite.

Exemples.

Soit la fraction proposée $\frac{2016}{3780}$.
Je divise par 2, c'est $\frac{1008}{1890}$.
Je divise encore par 2, c'est $\frac{504}{945}$.
Je divise par 3, c'est $\frac{168}{315}$.
Je divise encore par 3, c'est $\frac{56}{105}$.
Je divise par 7, c'est $\frac{8}{15}$, & c'est la fraction réduite.

Lors qu'il y a des zero à la fin du numerateur & du dénominateur, on les efface de part & d'autre en pareil nombre.

Ainsi $\frac{14400}{27000}$ se réduit d'abord à $\frac{144}{270}$. Puis à $\frac{72}{135}$, à $\frac{24}{45}$, à $\frac{8}{15}$.

On connoît par le dernier chifre si un nombre est pair ou impair.

Si ce dernier chifre est 0, ou 5. le nombre est divisible par 5.

Si la somme des chifres qui forment un nombre est 3. ou un multiple de 3. le nombre est divisible par 3.

Par exemple 201. est divisible par 3. parce que $2 + 0 + 1 = 3$. de même 783642 est divisible par 3, parce que $7 + 8 + 4 + 2 = 21$ multiple de 3, parce que $2 + 1 = 3$. on omet les 0, les 3, les 6, & les 9.

Si la somme des chifres qui forment un nombre est 9. ou un multiple de 9, le nombre est divisible par 9.

Par exemple 23571 est divisible par 9, parce que $2 + 3 + 5 + 7 + 1 = 18$ & $1 + 8 = 9$. on omet les 0, & les 9.

La raison des deux premieres Regles touchant les nombres pairs & les nombres divisibles par 5, est évidente par l'expression des nombres.

Les deux dernieres sont aussi fondées sur cette expression de dix en dix, parce que

10 = 3 fois 3, + 1.
donc 20 = 6 fois 3, + 2.
30 = 10 fois 3.
donc 40 = 13 fois 3, + 1.
50 = 16 fois 3, + 2.
&c.

10 = 9 + 1.
20 = 18 + 2 = 2 fois 9, + 2.
30 = 27 + 3 = 3 fois 9, + 3.
40 = 36 + 4 = 4 fois 9, + 4.
&c.

100 = 33 fois 3, + 1 = 11 fois 9, + 1.
200 = 66 fois 3, + 2 = 22 fois 9, + 2.
&c.

1000 = 333 fois 3, + 1 = 111 fois 9, + 1.
&c.

CHAPITRE IV.

De la réduction à même dénomination.

SOient les deux fractions proposées $\frac{2}{3}$ $\frac{5}{7}$ qu'il faille réduire à même dénomination.

Je multiplie le numerateur & le dénominateur de la fraction $\frac{2}{3}$ par 7, dénominateur de l'autre fraction, & j'ay une fraction équivalente $\frac{14}{21}$.

Je multiplie le numerateur & le dénominateur de la fraction $\frac{5}{7}$ par 3, dé-

nominateur de l'autre fraction, & j'ay une fraction équivalente $\frac{15}{21}$. Ainsi les deux fractions $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{7}$, qui avoient differens dénominateurs, sont réduites aux deux fractions $\frac{14}{21}$, $\frac{15}{21}$, qui ont un même dénominateur 21; ce qui doit toûjours arriver puisque 21 est d'abord le produit de 3 par 7. & ensuite le produit de 7 par 3. & $\frac{14}{21} = \frac{2}{3}$ & $\frac{15}{21} = \frac{5}{7}$ par le chap. 1. de ce Livre.

La Regle est donc de multiplier dénominateur par dénominateur, pour avoir le dénominateur commun, & de multiplier ensuite le numerateur de l'un par le dénominateur de l'autre pour avoir le numerateur équivalent.

Soient les deux fractions $\frac{a}{b}$ $\frac{c}{d}$, on les réduira aux deux $\frac{ad}{bd}$, $\frac{cb}{db}$.

Soient les deux fractions,

$$\frac{2a - 5}{3a^2 + 6}, \quad \frac{4a^3 + 7}{5a^4 - 8}$$

On les réduira aux deux fractions.

$$\frac{10a^5 - 25a^4 - 16a + 40.}{15a^6 + 30a^4 - 24a^2 - 48.}$$

Et $\frac{12a^5 + 24a^3 + 21a^2 + 42.}{15a^6 + 30a^4 - 24a^2 - 48.}$

En multipliant d'abord $5a^4 - 8$ par $3a^2 + 6$ pour avoir le dénominateur commun, $15a^6 + 30a^4 24a^2 - 48$, & multipliant ensuite $5a^4 - 8$ par $2a - 5$. pour avoir le numerateur $10a^5 - 25a^4$, &c.

Si il y a plus de deux fractions à réduire à même dénomination, il faut multiplier continuellement tous les dénominateurs l'un par l'autre, pour avoir le dénominateur commun.

Et pour avoir le numerateur équivalent, il faut diviser ce dénominateur commun par le dénominateur propre de la fraction, & multiplier le quotient par le numerateur propre de la même fraction, le produit sera le numerateur équivalent.

Exemple.

Il faut réduire à même dénomination ces trois fractions $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{5}{7}$.

Je multiplie le dénominateur 3, par le dénominateur 4, & je multiplie encore le produit 12 par le dénominateur 7; le produit 84 est le dénominateur commun.

Pour avoir la fraction équivalente à la fraction $\frac{2}{3}$ sur ce dénominateur 84; je

divise 84 par le dénominateur propre qui est 3, & je multiplie le quotient 28, par le numerateur propre qui est 2. Le produit 56 est le numerateur cherché.

J'ay donc $\frac{56}{84} = \frac{2}{3}$.

Pour avoir la fraction équivalente à la fraction $\frac{3}{4}$ sur ce même dénominateur 84, je divise 84 par le dénominateur propre 4, & je multiplie le quotient 21, par le numerateur propre qui est 3. le produit 63 est le numerateur cherché.

J'ay donc $\frac{63}{84} = \frac{3}{4}$.

Je divise 84 par 7. le quotient est 12 que je multiplie par 5, le produit est 60. & j'ay $\frac{60}{84} = \frac{5}{7}$, & les trois fractions sont réduites à même dénomination, ce qu'il faloit faire.

J'aurois pu trouver les numerateurs sans division, & par deux multiplications; pour avoir le numerateur 56. je n'ay qu'à multiplier continuellement le numerateur propre 2 par les autres dénominateurs 4, 7, en disant 2 fois 4 font 8, & 7 fois 8 font 56.

Ou bien en multipliant d'abord le dénominateur commun 84, par le numerateur propre 2, & divisant le produit 168 par le dénominateur propre qui est 3. le quotient 56 est le numerateur cherché.

Soient les trois fractions $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$.

On les réduira aux trois $\frac{adf}{bdf}$, $\frac{cbf}{bdf}$, $\frac{ebd}{bdf}$.

Il en est de même des fractions complexes.

Puis qu'on multiplie également le numerateur a, & le dénominateur b, par le produit des autres dénominateurs df, il est évident que $\frac{adf}{bdf} = \frac{a}{b}$, & puisque l'on multiplie de même toutes les autres fractions, il est évident qu'on les réduit à des fractions équivalentes & de même dénomination, ce qu'il faloit démontrer.

CHAPITRE V.

Methode pour réduire plusieurs fractions à moindres termes de même dénomination.

LA Methode cy-dessus est la plus aisée à retenir & à pratiquer, mais elle ne donne pas toûjours les fractions réduites les plus simples qu'il soit possible. Par exemple si on avoit à réduire à même dénomination ces deux fractions $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{12}$, on trouveroit pour fractions rédui-

tes $\frac{36}{48}$, $\frac{28}{48}$, qui peuvent être réduites à $\frac{9}{12}$ & $\frac{7}{12}$.

Et si on avoit à réduire ces deux fractions $\frac{8}{15}$, $\frac{13}{20}$, on trouveroit pour fractions réduites $\frac{160}{300}$, $\frac{195}{300}$, qui peuvent être réduites à $\frac{32}{60}$, $\frac{39}{60}$.

Lorsque tous les dénominateurs sont premiers entre eux, les fractions réduites par la methode cy-dessus sont les plus simples qu'il est possible.

Lorsque ces dénominateurs ne sont pas premiers entre eux, les fractions réduites à même dénomination par la methode cy-dessus, pourront encore être réduites à moindres termes par la Regle suivante.

Regle.

Cherchez la plus grande commune mesure du numerateur & du dénominateur de la premiere fraction par la Regle que j'ay donnée au Chapitre premier de ce Livre.

Cherchez une seconde plus grande commune mesure entre cette premiere & le numerateur de la seconde fraction, puis entre cette seconde commune mesure & le troisiéme numerateur, & entre cette troisiéme plus grande commune mesure & le quatriéme numerateur,

& ainsi de suite jusques au dernier numerateur.

Divisez par la derniere plus grande commune mesure tous les numerateurs, & le dénominateur commun, les quotients donneront toutes les fractions réduites à leur moindres termes possibles de même dénomination.

Exemple.

Il faut réduire à moindres termes de même dénomination ces trois fractions $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{12}$, $\frac{5}{18}$, je les réduis par la Regle du chap. 4. à ces trois $\frac{648}{864}$, $\frac{504}{864}$, $\frac{240}{864}$.

La plus grande commune mesure entre 648. & 864 est 216.

La plus grande commune mesure entre 216. & 504, est 72.

La plus grande commune mesure entre 72 & 240, est 24.

Je divise 648, 504, 240, 864, par 24. & j'écris pour fractions réduites $\frac{27}{36}$, $\frac{21}{36}$, $\frac{10}{36}$. Il est avantageux de réduire chaque fraction en particulier à ses moindres termes, avant que de les réduire toutes à même dénomination, afin d'avoir de plus petits nombres.

Si une seule des plus grandes communes mesures que l'on cherche se trouve

être l'unité, les fractions proposées sont réduites à leurs moindres termes, & il est inutile de continuer l'operation.

Demonstration.

Pour réduire une fraction à ses moindres termes, il faut diviser le numerateur & le dénominateur par le même nombre, & par le plus grand nombre qu'il soit possible, c'est à dire par leur plus grande commune mesure.

Il faut donc que je prouve que 24. mesure les trois numerateurs & le dénominateur commun ; & qu'il est le plus grand de tous les nombres qui peuvent les mesurer.

1°. Puisque 24 mesure 240. & 72. il mesurera aussi le multiple de 72. qui est 504 ; mais 72 mesure aussi 216, donc 24 mesurera aussi les multiples de 216. qui sont 648 & 864, donc 24 mesure 240, 504, 648 & 864.

2°. Soit s'il est possible un nombre *a*, plus grand que 24, qui mesure aussi les mêmes nombres 240, 504, 648, 864. puisque *a* mesure 864 & 648, il mesurera aussi leur difference & leur plus grande commune mesure 216. & puis qu'il mesure 216, & 504, il mesurera aussi

leur difference 288, & puis qu'il mesure 216, & 288, il mesurera aussi leur difference 72. c'est à dire que *a* mesurera la plus grande commune mesure de 648 & de 504. Je prouveray de même qu'il mesurera 240 & 72, & leur plus grande commune mesure 24. donc *a* plus grand que 24. mesureroit 24. ce qui est absurde.

Donc les fractions proposées ont été réduites à leurs moindres termes de même dénomination, ce qu'il faloit démontrer.

CHAPITRE VI.

Autre Methode pour réduire plusieurs fractions à leurs moindres termes de même dénomination.

IL faut réduire à moindres termes de même dénomination ces trois fractions. $\frac{56}{105}$, $\frac{99}{180}$, $\frac{55}{198}$.

1°. Je les réduis premierement chacune en particulier à leurs moindres termes $\frac{8}{15}$, $\frac{11}{20}$, $\frac{5}{18}$.

2°. Je cherche ensuite la plus grande commune mesure entre les deux premiers dénominateurs 15 & 20, je trouve que c'est 5.

3°. Je divise les dénominateurs 15 & 20, par cette commune mesure 5. & j'écris les quotients 3 & 4 sous les dénominateurs.

4°. Je multiplie le second dénominateur 20, par le premier quotient 3. ou le premier dénominateur 15, par le second quotient 4. & j'écris le produit 60, sous ce même dénominateur 20.

5°. Je cherche la plus grande commune mesure entre ce produit 60, & le dénominateur 18. je trouve que c'est 6.

6°. Je divise le dénominateur 18, & le produit 60 par 6, & j'ecris les quotients 3 & 10, sous le produit 60. & sous le dénominateur 18.

7°. Je multiplie 60 par le quotient 3. le produit 180 est le dénominateur commun que l'on cherche.

8°. Pour avoir les numerateurs équivalents, je multiplie chaque numerateur propre continuellement par les quotients du produit precedent & des dénominateurs suivants, divisez par les plus grandes communes mesures. Ainsi je multiplie continuellement le numerateur propre 8. par les quotients 4 & 3, ce qui produit pour numerateur équivalant 96, &c. & les trois fractions réduites sont $\frac{96}{180}$, $\frac{99}{180}$, $\frac{50}{180}$.

Operation.

$\frac{8}{15}$ $\frac{11}{20}$ $\frac{5}{18}$.

5 commune mesure.

3 . . . . 4 quotients.

60 produit. 18 dénominateur.

6 commune mesure.

10 . . . 3 quotients.

180 produit & dénominat. cherché.

Autre Exemple.

Il faut réduire à moindres termes de même dénomination ces cinq fractions.

$\frac{8}{15}$, $\frac{11}{20}$, $\frac{5}{42}$, $\frac{13}{24}$, $\frac{8}{63}$.

Operation.

15, 20, 42, 24, 63 dénominat.

5 mesure.

3 4 quotients.

produit 60 42 dénominateur.

6 mesure.

10 7 quotients.

produit 420. 24 dénominateur.

12 mesure.

35. 2 quotients.

produit 840. 63 dénominateur.

21 mesure.

40. 3 quotients.

2520 dénominateur cherché.

Ce dénominateur étant trouvé, on trouvera aisément tous les numerateurs. Par exemple pour la fraction $\frac{8}{15}$, je divise 2520 par 15. & je multiplie le quotient 168 par 8. le produit 1344 est le numerateur cherché, & $\frac{8}{15} = \frac{1344}{2520}$ ou je multiplie 2520 par 8. & je divise le produit 20160 par 15, le quotient 1344 est le numerateur cherché, & ainsi des autres.

Ou plus simplement & plus élegamment sans faire aucune division, je multiplie continuellement 8 par les quotients, qui répondent aux autres fractions, c'est à dire par 4, par 7, par 2, par 3, & le produit est 1344.

Pour avoir le second numerateur, je multiplie continuellement 11 par les quotients 3, 7, 2, 3. le produit 1386 est le numerateur cherché & $\frac{11}{20} = \frac{1386}{2520}$. Pour $\frac{5}{42}$, je multiplie 5 par le quotient 10. du produit precedent, & par les quotiens 2, 3, des dénominateurs suivans; le produit est 300 & $\frac{5}{42} = \frac{300}{2520}$.

Pour $\frac{13}{24}$, je multiplie continuellement 13 par le quotient 35 du produit precedent, & par 3 quotient du dénominateur suivant le produit est 1365 & $\frac{13}{24} = \frac{1365}{2520}$.

Enfin pour $\frac{8}{63}$, je multiplie 8 par 40,

quotient du produit precedent, le produit est 320 & $\frac{8}{63} = \frac{320}{2520}$, & les cinq fractions proposées sont réduites à moindres termes de même dénomination.

Demonstration.

Il faut démontrer que 2520 dénominateur commun est mesuré par les cinq dénominateurs donnez. Car autrement 2520 ne pourroit pas être un dénominateur équivalent.

2°. Que 2520 est le plus petit nombre mesuré par ces cinq dénominateurs. Car autrement les fractions proposées ne seroient pas réduites à moindres termes de même dénomination.

3°. Que les numerateurs 1344. 1386, &c. sont autant multiples des numerateurs propres 8, 11, &c. que 2520 est multiple des dénominateurs propres, 15, 20, &c. Car autrement les fractions ne seroient pas équivalentes.

1°. 2520 = 40 fois 63. donc il est mesuré par 63.

2520 = 3 fois, 35 fois 24. donc il est mesuré par 24.

2520 = 3 fois 2 fois, 10 fois 42, donc il est mesuré par 42.

2520 = 3 fois 2, fois 7 fois, 3 fois 20, donc il est mesuré par 20.

2520 = 3 fois, 2 fois 7 fois, 4 fois 15. donc il eſt meſuré par 15.

2°. 60. eſt le plus petit nombre meſuré par 15, & par 20. Car ſoit s'il eſt poſſible un autre nombre *a* plus petit que 60, & meſuré par 15, & par 20.

Que 15 meſure *a* par *c*, donc *c* ſera plus petit que 4.

Que 20 meſure *a* par *d*, donc *d* ſera plus petit que 3.

Mais puiſque $20d = 15c = a$. donc $\frac{20}{c} = \frac{15}{d}$.

Et 20. 15 : *c*. *d*.

Or 20. 15 : 4. 3.

Donc *c*. *d* : 4. 3. donc $\frac{c}{d} = \frac{4}{3}$, mais 4 & 3 ſont premiers entre eux, puiſque par conſtruction ce ſont les quotients de 20 & 15, diviſez par leur plus grande commune meſure; donc *c*, *d* ſont plus grands que 4 & 3. mais ils étoient plus petits, puiſque *a* eſt plus petit que 60, donc ils ſont plus grands & plus petits, ce qui eſt abſurde.

On prouvera de même que 420 eſt le plus petit nombre meſuré 20, 15, & 42; que 840 eſt le plus petit nombre meſuré par 15, 20, 42, 24.

Et enfin que 2520 eſt le plus petit nombre

bre mesuré par 15, 20, 42, 24, 63.

3°. Par construction 320 = 8 fois 40, de même que 2520 = 63 fois 40. donc $\frac{320}{2520} = \frac{8}{63}$. Par construction 1365 = 13 fois 3 fois 35, de même que 2520 = 24 fois 3 fois 35, donc $\frac{1365}{2520} = \frac{13}{24}$. Et ainsi des autres.

CHAPITRE VII.

Des autres especes de réductions.

1°. TOut nombre entier sera réduit en forme de fraction, en écrivant au dessous l'unité, comme dénominateur. $\frac{3}{1}$. $\frac{5}{1}$. $\frac{a}{1}$, $\frac{b}{1}$, $\frac{a+b}{1}$, ce qui ne change rien.

2°. Tout nombre entier sera facilement réduit en forme de fraction avec un dénominateur donné, il faut pour cela multiplier le nombre par le dénominateur, & écrire le produit pour numerateur. Par exemple on veut réduire 3, en forme de fraction, dont le dénominateur soit 5. j'écris $\frac{15}{5} = 3$.

3°. Tout nombre mixte sera réduit en forme de fraction simple.

V

Il faut multiplier le nombre entier par le dénominateur, & au produit ajoûter le numerateur, la somme sera le numerateur cherché. Il faut réduire 3 $\frac{5}{7}$ en forme de fraction simple; je dis 3 fois 7 font 21. & 21 + 5 = 26. j'écris $\frac{26}{7} = 3\frac{5}{7}$.

4°. On réduira une fraction proposée à un numerateur ou à un dénominateur donné par une Regle de trois en faisant, comme le numerateur est au dénominateur, ainsi le numerateur proposé au dénominateur cherché & correspondant, ou comme le dénominateur est au numerateur, ainsi le dénominateur proposé au numerateur cherché.

Exemple.

Il faut réduire la fraction $\frac{24}{45}$ à une fraction dont le numerateur soit 8. Je dis 24. 45 :: 8. 15. en multipliant 45 par 8, & divisant le produit par 24. & j'écris $\frac{8}{15} = \frac{24}{45}$ par le chap. 1.

Second Exemple.

Il faut réduire la fraction $\frac{24}{45}$ à une fraction, dont le numerateur soit 10. Je dis 24. 45 :: 10. 18$\frac{3}{4}$, & j'écris $\frac{10}{18\frac{3}{4}} = \frac{24}{45}$.

Troisiéme Exemple.

Il faut réduire la fraction $\frac{24}{45}$ à une fraction, dont le dénominateur soit 15. je dis 45. 24 : 15 : 8. j'écris $\frac{8}{15} = \frac{24}{45}$.

Quatriéme Exemple.

Il faut réduire la fraction $\frac{24}{45}$ à une fraction, dont le dénominateur soit 10. je dis 45. 24 : 10. $5\frac{1}{3}$. j'écris $\frac{5\frac{1}{3}}{10}$.

Cinquiéme Exemple.

Il faut réduire la même fraction $\frac{24}{45}$ à une fraction, dont le dénominateur soit 100. je trouve $\frac{53\frac{1}{3}}{100}$.

Cette espece de réduction est inutile, lorsque le quatriéme terme cherché n'est pas un nombre entier, parce que pour lors la fraction est exprimée d'une maniere trop composée, ayant pour numerateur ou pour dénominateur une fraction, ou un nombre mixte.

Dans le quatriéme & le cinquiéme exemple on voit comment on peut réduire toute fraction donnée en fractions decimales, c'est à dire qui ayent pour dénominateurs, ou 10, ou 100, ou

1000, &c. on n'exprime point ces dénominateurs, & on neglige les fractions du numerateur. Mais lors qu'elles ont pour dénominateur 10. on les appelle des *primes*. Ainsi au lieu d'écrire $\frac{7}{10}$, on écrit 7'. ce qui signifie 7 primes ou 7 dixiémes.

Lors que le dénominateur est 100. on les appelle des *secondes*. Ainsi au lieu d'écrire $\frac{7}{100}$, on écrit 7'' & au lieu d'écrire $\frac{86}{100}$, on écrit 86'', ce qui signifie 86 centiemes, ou 86. secondes, ou 8 primes, plus 6 secondes, &c.

On ne peut réduire exactement en fractions decimales que les fractions dont le dénominateur est composé de 2, ou de 5 seulement & de leurs puissances, comme $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{20}$, $\frac{1}{25}$, &c. Car soit $2 = a$ & $5 = b$, donc toute fraction reductible s'exprimera par cette fraction $\frac{c}{a^d b^e}$ ou d, & e marquent un exposant queldonque des puissances d'a & de b, ou bien zero pour l'un des deux. Or puisque $10 = a^1 b^1$, $a^2 b^2 = 100$, $a^3 b^3 = 1000$, &c. Il est évident qu'on peut choisir dans cette progression 10. 100. 1000. &c. un nombre multiple d'$a^d b^e$, c'est à dire un nombre ou l'exposant d'a, soit égal ou plus grand que

d, & l'exposant de *b* soit plus grand ou égal à l'exposant d'*e*; soit ce nombre $a^{d+1} b^e$, il faudra suivant la Regle trouver aux trois nombres donnez $a^d b^e$, *c*, $a^{d+1} b^e$, un quatriéme terme proportionnel, qui sera *c a* numerateur cherché. Par exemple, je veux reduire cette fraction $\frac{3}{16}$ en fraction decimale. Parce que $16 = a^4$. Je prens pour dénominateur la quatriéme puissance de 10. qui est 10000. & je dis 16. 3 : 10000. 1875. La fraction decimale est $\frac{1875}{10000} = \frac{3}{16}$, & on écrit simplement 1875''''. Il n'y a donc qu'à ajoûter au numerateur 3 un nombre suffisant de zero, & continuer la division par le dénominateur 30000 | 1875.

16 . . .

Le quotient 1875 est le numerat. cherché.

2°. Si le dénominateur donné est composé de quelqu'autre nombre premier que 2, ou 5, on ne trouvera jamais un quotient sans reste, par exemple si on a $\frac{3}{7}$, $\frac{2}{15}$ &c. Je suppose la fraction reduite à ses moindres termes. Car quelque nombre de zero qu'on ajoûte, 30000, &c. sera toûjours nombre premier à 7, & 20000 &c. sera toûjours nombre premier à 3, composant de 15. donc on

ne pourra jamais divifer exactement 30000 &c. par 7. ni 20000 &c. par 15. Car tout nombre qui peut être mefuré par 15, peut à plus forte raifon être mefuré par 3. & ce qui ne peut pas être mefuré par 3, ne peut pas l'être par 15.

Pour le démontrer il faut que je prouve que *fi deux nombres font premiers à un troifiéme leur produit fera auffi premier à ce troifiéme.*

Si 3 & 10 font premiers à 7. 30 fera premier à 7, & fi 30 & 10 font premiers à 7. 300 fera premier à 7. & fi 300 & 10 font premiers à 7. 3000 fera premier à 7. & ainfi de fuite donc 30, 300, 3000, &c. ne pourront pas être mefurez par 7.

Si 30 n'étoit pas nombre premier à 7. foit leur commune mefure *a*, & que *a* mefure 30 par *b*; donc $\frac{30}{a} = b$; donc $30 = ab$ & $a. 3 :: 10. b$. Mais parce que 3 eft premier à 7, lequel *a* mefure, donc 3 eft premier à *a*, car fi *a* mefuroit 3. & 7, ou fi *a* & 3 avoient une commune mefure *e*, cet *e* mefureroit 3. & 7. & par confequent 3 & 7. ne feroient pas premiers entre eux contre l'hypothefe, donc puifque $a. 3 :: 10. b$, & que

a & 3 sont premiers entre eux la fraction $\frac{3}{a}$ est une fraction primitive & son équivalente $\frac{b}{10}$ en est équimultiple. C'est à dire que *a* mesure 10. mais il mesuroit aussi 7, donc *a* mesure 7 & 10. donc 7 & 10 ne sont pas premiers entre eux contre l'hypothese. On prouvera de même que puisque 30 & 10 sont premiers à 7. leur produit 300 est aussi premier à 7. & ainsi de suite, ce qu'il faloit démontrer.

En continuant indefiniment cette division, on trouve une suite de revolutions semblables des mêmes chifres dans le quotient. Par exemple en divisant $\frac{3000}{7}$ &c. On trouve pour quotient. 428571. 428571. 428571, &c. Ce qui doit arriver necessairement, lors que le reste de la division se trouve égal au premier numerateur ou à un reste precedent. Car pour lors le dividende & le diviseur étant les mêmes, il faut que la suite des quotients soient les mêmes; & il est impossible que le dénominateur étant un nombre fini, on ne trouve des restes égaux.

Cette reduction des fractions ordi-

naires en fractions decimales peut être d'un grand usage dans le toisé, & généralement dans tous les nombres complexes arithmetiques, où il s'agit de supputer ou de mesurer des choses sensibles. On suppose par exemple la toise divisée en 10000 parties égales, au lieu de la diviser en 6 pieds, & le pied en douze pouces, &c. & parce que le pied est la $\frac{1}{6}$ de la toise, il s'ensuit qu'un pied vaut $1666''''\frac{2}{3}$, ou $\frac{1666\frac{2}{3}}{10000}$; mais on neglige la fraction $\frac{2}{3}$. Comme ne pouvant pas causer un erreur sensible dans le calcul, & on suppose 1 pi. = 1667''''. 2 pi. = 3333. 3 pi. = 5000 &c. un pouce vaut $138''''\frac{8}{9}$, & on suppose 1 po. = 139''''. 2 po. = 278'''', &c. 1 ligne vaut $11''''\frac{31}{54}$, & on suppose 1 lig. = 12''''. 2 lig. = 23''''. 3 lig. = 35'''' &c.

Supposé donc qu'il faille multiplier 50 toises, 4 pieds : 8 pouces, 7 lignes, par 40 toises, 5 pieds, 7 pou. 6 lig.

J'ajoûte	50.	0000''''.	40.	0000''''
4 pieds.		6667	5 pi.	8333
8 pouces.		1111	7 po.	972
7 lignes.		81	6 lig.	69
somme	50.	7859''''	40.	9374''''

C'est

C'est comme si j'avois à multiplier $50\frac{7859}{10000}$ ou $\frac{507859}{10000}$ par $40\frac{9374}{10000}$, & supposant $\frac{1}{10} = a$, & $\frac{1}{100} = a^2$, & $\frac{1}{1000} = a^3$ &c. c'est comme si j'avois à multiplier $507859a^4$ par $409374a^4$. Le produit est $2079.04270266a^8$; c'est à dire 2079.04270266^{viii} ou 2079 toises $\frac{427}{10000}$, negligeant les quatre derniers chifres; & reduisant cette fraction $\frac{427}{10000}$, ou par le moyen d'une Table, (ce qui est le plus commode) ou par la Regle générale des réductions, en multipliant le numerateur 427 par 36, nombre des pieds quarrez que vaut une toise quarrée, & retranchant du produit 15372, les quatre derniers chifres, &c. On trouve que cette fraction vaut 1 pied quarré, 77 pouces, 51 lig. Le produit cherché est donc de 2079 t. 1 pi. 77 pou. 51 lig. mais il est effectivement suivant la methode exacte du Chapit. 3. du Livre 2. de 2079. 1 pied. 99 po. 54 l.

Donc l'erreur est insensible par cette derniere methode, & elle est beaucoup plus courte.

L'erreur est toûjours moindre que $\frac{3}{20000}$ de toise, dans chacun des deux termes à multiplier, en sorte que l'erreur ne peut être d'une toise quarrée dans le produit, à moins que la somme des toi-

ſes à multiplier ne ſoit plus grande que 6000 toiſes, ce qui n'arrive preſque jamais dans la pratique. L'erreur ſera moindre que 1 pied, ſi cette ſomme eſt moindre que 180 toiſes, &c. On peut abbreger la methode en ne multipliant d'abord que les toiſes par les toiſes, 50 par 40. dont le produit eſt 2000 t. & enſuite 9374'''' par 50. & 7859'''' par 40. la ſomme des produits eſt 783060'''' ou 78 toiſ. 3060''''. Enfin je multiplie 9374'''' par 7859''''; mais parce que le produit doit être des huitiémes, & qu'on neglige ce qui paſſe les quatriémes, au lieu de multiplier 9374 par 7859 à la maniere ordinaire, j'écris les chifres de mon multiplicateur à rebours, & je mets le premier chifre du multiplicateur 7859, c'eſt à dire je mets 7. devant le quatriéme chifre du nombre à multiplier, c'eſt à dire devant 4, & les autres chifres je les écris à rebours de droite à gauche.

Operation.

9374		9374
9587		7859
6562 +		84366
750 +		46870
47 +		74992
8 —		65618
7367''''	produit	73670266''''''''

Je multiplie ensuite $937\frac{4}{10}$ par 7. ce qui produit 6562 à peu prés; & $93\frac{7}{10}$ par 8 produit 750 à peu prés, & $9\frac{37}{100}$ par 5 produit 47 à peu prés; enfin $\frac{9}{10}$ par 9 produit 8 à peu prés. La somme donne 7367'''', qui jointes à 3060'''' donne 10427'''' ou 1 toise, & 427'''' comme cy-dessus. Cette maniere abbregée de multiplier est d'un tres grand usage dans la Regle de trois, lorsque le premier terme est l'unité suivie d'un nombre donné de zero, comme il arrive dans presque toutes les questions de la Trigonometrie.

Si 100000. 80902 : 39875. 32260.

57893

24271
7281
647
57
4

produit 32260.

Il ne faut que comparer l'operation faite par la methode ordinaire avec l'operation abbregée, pour voir en quoy consiste l'abbregé.

On peut encore abbreger la Regle de trois en réduisant à moindres termes, une fraction dont le premier terme donné soit le numerateur, & le second le dénominateur; & réduisant encore à moindre termes une fraction dont le numerateur soit ce numerateur reduit, & le dénominateur soit le troisiéme donné. Car si le quatriéme terme cherché est un nombre entier; on le trouvera en multipliant les deux dénominateurs reduits l'un par l'autre; & si ce n'est pas un nombre entier on le trouvera en divisant ce produit par le numerateur reduit.

Si 45. 24 : 30. $\frac{45}{24} = \frac{15}{8}$ $\frac{15}{30} = \frac{1}{2}$.
15. 8 : 30.
1. 2 : 8. 16 nombre cherché.

Si 45. 24 : 36. $\frac{45}{24} = \frac{15}{8}$
Si 15. 8 : 36. $\frac{15}{36} = \frac{5}{12}$
5. 12 : 8. 19 $\frac{1}{5}$ nombre cherché.

CHAPITRE VIII.

De la réduction des fractions de fractions en fractions simples.

ON veut réduire en fraction simple cette fraction de fraction $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$; c'est à dire on demande à exprimer ce que c'est que les deux tiers des trois quarts de quelque tout. Je dis, le tiers de $\frac{3}{4}$ est $\frac{1}{4}$, en divisant le numerateur 3 de la derniere fraction $\frac{3}{4}$ par le dénominateur 3 de la premiere $\frac{2}{3}$; & si un tiers de $\frac{3}{4}$ est $\frac{1}{4}$, donc deux tiers de $\frac{3}{4}$ seront $\frac{2}{4}$ ou $\frac{1}{2}$, ce qu'il falloit trouver. On veut réduire en fraction simple cette fraction de fraction $\frac{2}{3}$ de $\frac{5}{7}$. Je dis le tiers de $\frac{5}{7}$ est $\frac{5}{21}$; car il est évident que chaque $\frac{1}{21}$ est le tiers de $\frac{1}{7}$, donc $\frac{2}{3}$ de $\frac{5}{7} = \frac{10}{21}$, en multipliant dénominateur par dénomi-

nateur 3 par 7. & numerateur par numerateur 2 par 5. On veut réduire en fraction simple cette fraction de fraction de fraction $\frac{2}{3}$ de $\frac{5}{7}$ de $\frac{13}{17}$, je multiplie continuellement le numerateur 2 par 5, par 13, le produit est 130, & les dénominateurs 3 par 7, par 17. le produit est 357, je dis que $\frac{2}{3}$ de $\frac{5}{7}$ de $\frac{13}{17} = \frac{130}{357}$. Car $\frac{2}{3}$ de $\frac{5}{7} = \frac{10}{21}$ & $\frac{10}{21}$ de $\frac{13}{17} = \frac{130}{357}$.

La Regle générale est donc de multiplier continuellement tous les numerateurs pour avoir le numerateur de la fraction simple, & de multiplier continuellement tous les dénominateurs pour avoir le dénominateur de la même fraction simple.

Cette Regle a ses abbregez comme dans le premier exemple, lors que le numerateur d'une fraction & le dénominateur de l'autre ont des communes mesures; mais ces abbregez sont embarrassans; & il vaut mieux dans la pratique se servir de la Regle générale, & réduire ensuite la fraction simple à ses moindres termes.

CHAPITRE IX.

De l'Addition des fractions.

Si les fractions proposées à ajoûter ont le même dénominateur, il n'y a qu'à ajoûter les numerateurs, & garder le même dénominateur pour avoir la somme.

Si les fractions proposées n'ont pas le même dénominateur, il faut les réduire à même dénomination par les Regles precedentes.

Exemples.

Il faut ajoûter $\frac{2}{3}$ à $\frac{1}{3}$, c'est $\frac{3}{3} = 1$.

Il faut ajoûter $\frac{2}{5}$ à $\frac{3}{5}$, c'est $\frac{5}{5} = 1$.

Il faut ajoûter $\frac{2}{7}$ à $\frac{3}{7}$, c'est $\frac{5}{7}$.

Il faut ajoûter $\frac{2}{3}$ à $\frac{3}{4}$. Je les réduis à même dénomination, c'est $\frac{8}{12}$ & $\frac{9}{12}$, dont la somme est $\frac{17}{12} = 1\frac{5}{12}$.

Il faut ajoûter $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{12}$, $\frac{5}{18}$. Je les réduis à même dénomination; c'est $\frac{27}{36}$, $\frac{21}{36}$, $\frac{10}{36}$, la somme est $\frac{58}{36} = 1\frac{11}{18}$.

Il faut ajoûter $\frac{a}{b}$ avec $\frac{c}{b}$, c'est $\frac{a+c}{b}$.

Il faut ajoûter $\frac{a}{b}$ à $\frac{c}{d}$, je le réduis à même dénomination ; c'est $\frac{ad}{bd}$, $\frac{bc}{bd}$, la somme est $\frac{ad + bc.}{bd.}$

Chapitre X.

De la Soustraction des fractions.

Pour ôter une fraction d'un nombre entier, il faut diminuer ce nombre d'une unité & y ajoûter pour fraction le même dénominateur avec la difference du numerateur au dénominateur pour numerateur. Il faut ôter $\frac{3}{7}$ de 10. J'écris $9\frac{4}{7}$, parce que $9 + 1$ ou $9 + \frac{7}{7} = 10$. & pour ôter $2\frac{3}{7}$ de $10\frac{2}{5}$, j'écris $7\frac{4}{7} + \frac{2}{5} = 7\frac{34}{35}$.

Si les deux fractions proposées ont le même dénominateur, il faut soustraire numerateur de numerateur.

Si les fractions ont un dénominateur different, il faut les réduire à même dénomination.

Exemples.

Il faut soustraire $\frac{2}{7}$ de $\frac{5}{7}$ reste $\frac{3}{7}$.

Il faut ſouſtraire $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$, je les réduis à même dénomination; c'eſt $\frac{8}{12}$ de $\frac{9}{12}$ il reſte $\frac{1}{12}$.

Il faut ſouſtraire $\frac{a}{b}$ de $\frac{c}{b}$, il reſte

$$\frac{c-a}{b}.$$

Il faut ſouſtraire $\frac{a}{b}$ de $\frac{c}{d}$, je les réduis à même dénomination; c'eſt $\frac{ad}{bd}$ $\frac{bc}{bd}$ il reſte $\frac{bc-ad}{bd}$.

CHAPITRE XI.

De la Multiplication des fractions.

POur multiplier une fraction par un nombre entier, il n'y a qu'à multiplier ſon numerateur & garder le même dénominateur, ou diviſer ſon dénominateur & garder le même numerateur.

Exemples.

Il faut multiplier $\frac{2}{7}$ par 3. je dis 3 fois 2 font 6, j'écris $\frac{6}{7}$ c'eſt le produit cherché, ce qui eſt évident par ſoy-même.

Il faut multiplier $\frac{7}{12}$ par 4, je divise 12 par 4. le quotient est 3. j'écris $\frac{7}{3}$ = $2\frac{1}{3}$, c'est le produit cherché. Car $\frac{1}{3}$ vaut 4 fois $\frac{1}{12}$.

Il faut multiplier $\frac{8}{15}$ par 20. Le produit est $\frac{160}{15}$ = $10\frac{2}{3}$; mais parce que 20 & 15 ont une commune mesure 5, qui divisant 15 donne 3, je prens 3 pour dénominateur; & parce que le même 5 mesure 20 par 4. Je multiplie 8 par 4. le produit est 32 que je prens pour numerateur, & j'ay pour produit $\frac{32}{3}$ = $10\frac{2}{3}$, car multiplier par 20 & diviser par 15 est la même chose, que multiplier par 4 & diviser par 3.

Pour multiplier une fraction par une fraction, il faut multiplier numerateur par numerateur & dénominateur par dénominateur, ou diviser le premier dénominateur par le second numerateur, & multiplier le quotient par le second dénominateur.

Exemples.

Pour multiplier $\frac{2}{3}$ par $\frac{4}{5}$, j'écris $\frac{8}{15}$; car si je multipliois $\frac{4}{5}$ par 2. le produit seroit $\frac{8}{5}$, mais je multiplie par le tiers de 2, il faut donc diviser $\frac{8}{5}$ par 3. c'est ce que je fais en multipliant 5 par 3, & écrivant $\frac{8}{15}$. Car le numerateur demeu-

rant le même, la fraction est d'autant plus petite que le numerateur est plus grand. Si je divisois une ligne en cinq parties égales, chacune de ces parties seroit trois plus grande que si j'eusse divisé cette même ligne en quinze parties.

Pour multiplier $\frac{7}{15}$ par $\frac{3}{4}$, je divise 15 par 3, & je multiplie le quotient 5 par 4. c'est 20, j'écris $\frac{7}{20}$ produit cherché. Car $\frac{21}{15} = \frac{7}{5}$.

Pour multiplier $\frac{14}{15}$ par $\frac{20}{21}$, parce que 20 & 15 ont une commune mesure, 5 qui mesure 20 par 4, & 15 par 3. & que 14 & 21 ont une commune mesure, 7 qui mesure 14 par 2. & 21 par 3, au lieu d'écrire $\frac{20 \text{ fois } 14}{21 \text{ fois } 15} = \frac{280}{315}$. J'écris $\frac{4 \text{ fois } 2}{3 \text{ fois } 3} = \frac{8}{9}$ produit cherché.

Pour multiplier nombre mixte par nombre mixte, ou je les réduis en fraction, ou je multiplie nombre entier par nombre entier, puis fraction de l'un par nombre entier de l'autre ; & enfin fraction par fraction. La somme de ces produits donne le produit total.

Il faut multiplier $10\frac{2}{3}$ par $5\frac{3}{4}$, ou je réduis tout en fraction, c'est $\frac{32}{3}$ par $\frac{23}{4}$, dont le produit est $\frac{736}{12}$ ou $\frac{184}{3} = 61\frac{1}{3}$.

Ou je multiplie $10 + \frac{2}{3}$ par $5 + \frac{3}{4}$; en forme de nombre complexe, le produit eſt $50 + \frac{10}{3} + \frac{20}{4} + \frac{6}{12} = 61\frac{1}{3}$.

Pour multiplier $\frac{a}{b}$ par $\frac{c}{d}$, j'écris $\frac{ac}{bd}$.

Pour multiplier $\frac{ab}{cd}$ par $\frac{ce}{fa}$, j'écris $\frac{abce}{cdfa} = \frac{be}{df}$, ce qui démontre le troiſiéme exemple cy-deſſus.

Il paroît ſurprenant que $\frac{1}{2}$ par $\frac{1}{2}$ produiſe $\frac{1}{4}$, en ſorte que le produit ſoit plus petit, que ni le multiplicateur ni le multiplié; & de même $\frac{1}{3}$ par $\frac{1}{5}$ produit $\frac{1}{15}$. Mais il eſt aiſé d'en comprendre la raiſon par cette hypotheſe; ſi je multipliois $\frac{1}{3}$ par 1. le produit ſeroit $\frac{1}{3}$; mais je multiplie par un nombre cinq fois plus petit que 1, qui eſt $\frac{1}{5}$ donc le produit doit être cinq fois plus petit que $\frac{1}{3}$; c'eſt à dire qu'il doit être $\frac{1}{15}$.

La réduction des fractions de fraction, & la multiplication des fractions ſont une même operation.

Chapitre XII.

De la Diviſion.

Je ſuppoſe que tant le diviſeur que le dividende ſont réduits en forme de

fraction. Si l'un des deux eſt un nombre entier, il n'y a qu'à ſuppoſer l'unité pour dénominateur, ſi c'eſt un nombre mixte on le réduira auſſi en forme de fraction ſimple par la Regle du Chapitre 8.

Il faut multiplier le numerateur du dividende par le dénominateur du diviſeur, pour avoir le numerateur du quotient.

Et multiplier le dénominateur du dividende par le numerateur du diviſeur, pour avoir le dénominateur du quotient.

Pour diviſer $\frac{2}{3}$ par $\frac{5}{7}$, je multiplie en croix 3 par 5, & 2 par 7. le quotient cherché eſt $\frac{14}{15}$. Car ſi je voulois diviſer $\frac{2}{3}$ par 5, ou prendre la cinquiéme de $\frac{2}{3}$, je n'aurois qu'à multiplier 3 par 5, & écrire pour quotient $\frac{2}{15}$. Mais ce quotient eſt trop petit, parce que je ne diviſe pas $\frac{2}{3}$ par 5, mais par $\frac{5}{7}$; c'eſt à dire ſeulement par la ſeptiéme partie de 5, il faut donc que je multiplie le quotient $\frac{2}{15}$ par 7. c'eſt à dire que j'écrive $\frac{14}{15}$ pour quotient cherché.

Pour diviſer $\frac{a}{b}$ par $\frac{c}{d}$, j'écris $\frac{ad}{bc}$

Pour diviſer $\frac{ae}{bc}$ par $\frac{de}{fc}$, j'écris $\frac{afec}{bcde}$ $= \frac{af}{bd}$, d'où je tire cette Regle abbre-

gée. Reduisez les numerateurs $\frac{ae}{de}$ à leur plus simple expression $\frac{a}{d}$ & les dénominateurs $\frac{bc}{fc}$, à leur plus simple expression $\frac{b}{f}$; multipliez en croix *a* par *f*, & *d* par *b*, & écrivez pour quotient $\frac{af}{bd}$.

Il n'y a point de difficulté particuliere pour les fractions complexes; c'est pourquoy je n'en donne pas d'exemples.





LIVRE IV.

De la Formation & de la Resolution des Puissances.

Ou

De l'Extraction des Racines.

CHAPITRE I.

De la Formation des Puissances des Nombres incomplexes.

J'Ay déja expliqué *Livre 1. Chap. 8. pag. 67.* ce que c'est que les puissances d'un nombre incomplexe, & la maniere de les former par une multiplication reïterée.

Tout nombre incomplexe donné soit qu'on l'exprime par un seul chifre, ou par une seule ou plusieurs lettres, ou par un chifre & des lettres peut être consideré comme côte, comme racine, comme premiere puissance.

Ainsi 7, a, ab, $7ab$, $7a^3b^2$, peuvent être considerez, comme cinq côtez, com-

me cinq racines, comme cinq premieres puissances.

Le produit de la racine multipliée par elle même s'appelle le quarré de cette racine. Ainsi 49 est le quarré de 7. aa s'appelle le quarré d'a; $aabb$, ou a^2b^2 s'appelle le quarré d'ab. $49a^2b^2$ s'appelle le quarré de $7ab$, & $49a^6b^4$ est le quarré de $7a^3b^2$.

Le quarré multiplié par la racine produit le cube ou la troisiéme puissance de la racine.

Ainsi 7 fois 49 produit 343 cube de 7. & le produit de $7a^3b^2$ par $49a^6b^4$, qui est $343a^9b^6$ est le cube ou la troisiéme puissance de $7a^3b^2$.

Le cube multiplié par la racine, ou le quarré multiplié par le quarré produit le quarré de quarré, ou la quatriéme puissance de la racine, ainsi 343 multiplié par 7. produit 2401. & 49 multiplié par 49 produit 2401. & 2401 est le quarré de quarré, ou la quatriéme puissance de 7.

$343a^9b^6$ multiplié par $7a^3b^2$, ou $49a^6b^4$ par $49a^6b^4$ produit $2401a^{12}b^8$ quarré de quarré ou quatriéme puissance de $7a^3b^2$.

La cinquiéme puissance se forme de même en multipliant la quatriéme puissance

sance par la racine, ou la seconde puissance par la troisiéme.

La sixiéme puissance se forme en multipliant la cinquiéme par la racine, ou la quatriéme par la seconde, ou la troisiéme par elle même, ou en multipliant la seconde cubiquement, c'est à dire en la multipliant d'abord par elle-même, & multipliant encor ce produit par la même seconde puissance; & ainsi des autres.

Regle Generale.

Elever un Nombre incomplexe quelconque à une puissance donnée, dont l'exposant soit p.

MUltipliez continuellement le nombre donné par luy-même autant de fois que $p - 1$ a d'unitez, le dernier produit sera la puissance cherchée.

Ou bien élevez le nombre donné à la puissance d & à la puissance $p - d$. & multipliez ces deux puissances l'une par l'autre, leur produit sera la puissance cherchée.

Si p est un nombre premier, il est plus simple & plus avantageux de prendre $d = \frac{p - 1}{2}$.

Si p n'est pas un nombre premier, il

eſt avantageux de prendre d, égal à celuy des deux nombres qui produiſent p, qui ſurpaſſe le moins l'autre nombre.

Ou bien ſi d eſt encore trop grand, élevez le nombre donné à la puiſſance c, à la puiſſance f, à la puiſſance g, en ſorte que $c + f + g = p$. & que ces nombres c, f, g, approchent le plus prés qu'il ſoit poſſible de l'égalité, & ainſi de ſuite.

Exemples.

Il faut élever $5a^3b$ à la ſeptiéme puiſſance, je multiplie $5a^3b$ par $5a^3b$, le produit eſt $25a^6b^2$. Je multiplie $25a^6b^2$ par $5a^3b$, le produit eſt $125a^9b^3$; je multiplie $125a^9b^3$ par $5a^3b$, le produit eſt $625a^{12}b^4$; je multiplie &c. La ſixiéme multiplication donne pour produit $78125a^{21}b^7$, & c'eſt la ſeptiéme puiſſance cherchée.

Mais parce que 7 eſt un nombre premier, & que $7 = 3 + 4$. & que 3 & 4 ſont les deux nombres qui par addition forment 7. & qui en même temps approchent le plus de l'égalité, il eſt plus court de multiplier la troiſiéme puiſſance $125a^9b^3$ par la quatriéme $625a^{12}b^4$.

Second Exemple.

Il faut élever $5a^3b$ à la neuviéme puissance, je n'aurois qu'à multiplier $5a^3b$ par $5a^3b$, par $5a^3b$, par $5a^3b$, &c. en l'écrivant 9 fois, & faisant 8 multiplications continuelles; mais parce que $9 = 3$ fois 3. il est beaucoup plus court d'élever la troisiéme puissance $125a^9b^3$ à la troisiéme puissance, en multipliant $125a^9b^3$ par $125a^9b^3$, & le quarré $15625a^{18}b^6$ par $125a^9b^3$, le produit $1953125a^{27}b^9$ est la neuviéme puissance cherchée.

Troisiéme Exemple.

Il faut élever $2a^5b^3$ à la douziéme puissance, je considere que $12 = 2$ fois 6. mais 6 est encore trop grand, & $6 =$ 2 fois 3. C'est pourquoy je multiplie $2a5b^3$ cubiquement le produit est $8a^{15}b^9$, je multiplie ce cube par luy-même, le produit est $64a^{30}b^{18}$. Enfin je multiplie $64a^{30}b^{18}$ par luy-même, le produit $4096a^{60}b^{36}$ est la douziéme puissance cherchée.

Quatriéme Exemple.

Il faut élever $2a^5b^2$ à la quinziéme

puissance, je considere que 15 = 3 fois 5, mais 5 est encore trop grand & 5 = 2 + 3. c'est pourquoy je multiplie $2a^3b^2$ quarrément & cubiquement. C'est $4a^6b^4$ & $8a^9b^6$; je multiplie $4a^6b^4$ par $8a^9b^6$; le produit est $32a^{15}b^{10}$. qui est la cinquiéme puissance de $2a^3b^2$. Enfin je multiplie cubiquement $32a^{15}b^{10}$, le produit $32768a^{45}b^{30}$ est la quinziéme puissance cherchée.

Corollaire.

Elevez separement le chifre seul ou l'absolu à la puissance proposée, & multipliez les exposans des lettres par l'exposant de la puissance, pour élever $2a^3b^2$ à la quinziéme puissance, j'éleve l'absolu 2, (c'est à dire le chifre seul 2, qui multiplie le nombre litteral a^3b^2) à la quinziéme puissance. C'est 32768. & je multiplie par 15 l'exposant 3 de la lettre a, & l'exposant 2 de la lettre b, j'ay pour produits $a^{45}b^{30}$, & j'écris $32768a^{45}b^{30}$.

Remarque.

Lorsque l'absolu a plus d'un chifre, je le considere comme un nombre complexe, $23a$ est la même chose que $20a$ +

34. Cette Regle n'a pas besoin de Demonstration, puisque ce n'est proprement qu'une definition des puissances, & une application particuliere de la Regle générale de la multiplication.

CHAPITRE II.

De la Resolution des Puissances incomplexes.

LA Resolution des Puissances est opposée à leur formation, de même que la division est opposée à la multiplication.

Resoudre une puissance proposée, c'est trouver un nombre qui étant multiplié continuellement par luy-même un certain nombre de fois produise la puissance, & ce nombre qu'on cherche s'appelle la *Racine*.

Lors que la puissance proposée est un quarré, la racine s'appelle *racine quarrée* : lors que cette puissance est un cube, sa racine s'appelle *racine cubique* : lors que cette puissance est un quarré de quarré, ou du quatriéme degré, cette racine s'appelle *racine quatriéme*, & ainsi de suite.

Ainsi la racine quarrée de 49 est 7: la racine quarrée de *aa* est *a*: la racine quarrée de *aabb* est *ab*: la racine quarrée de 49*aabb* est 7*ab*: la racine quarrée de $49a^6b^4$ est $7a^3b^2$.

La racine cubique de 343 est 7: la racine cubique d'a^3 est *a*: la racine cubique d'a^3b^3 est *ab*: la racine cubique d'a^6b^6 est *aabb*: la racine cubique de $343a^3b^3$ est 7*ab*: la racine cubique de $343a^9b^6$ est $7a^3b^2$.

La racine quatriéme de 2401 est 7: &c.

La racine quinziéme de $32768a^{45}bb^{30}$ est $2a^3b^2$: &c. La racine prend donc en général son nom de l'exposant de la puissance dont elle est racine.

On suppose qu'on sache par cœur les puissances des neuf premiers chifres 1, 2, 3, 4, &c. 9. Il suffit de savoir pour la pratique les quarrez & les cubes, ou tout au plus les quatriémes & les cinquiémes puissances; & on les trouvera dans cette Table.

TABLE DES PUISSANCES.

Racin.	*quarrez.*	*cubes.*	*4emes.*	*5emes.*
1	1	1	1	1
2	4	8	16	32
3	9	27	81	243
4	16	64	256	1024
5	25	125	625	3125
6	36	216	1296	7776
7	49	343	2401	16807
8	64	512	4096	32768
9	81	729	6561	59049

Tirer une racine cinquiéme d'un nombre proposé, c'est chercher un nombre qui étant écrit 5 fois de suite pour le multiplier continuellement produise le nombre proposé; tirer la racine cinquiéme de 16807, c'est chercher un nombre comme 7, qui étant écrit 5 fois de suite pour le multiplier continuellement produise 16807. Car 7 fois 7 fois 7 fois 7 fois 7 produit 16807, & ainsi des autres; & comme il faut écrire deux fois le même nombre pour le multiplier, la premiere fois par luy-même, il est évident qu'il n'y a que 4 multiplications

à faire, c'est à dire une de moins que l'exposant de la puissance n'a d'unitez. L'exposant du quarré est 2, l'exposant du cube est 3, l'exposant du quarré de quarré est 4, &c. & l'exposant de la racine quarrée est aussi 2, l'exposant de la racine cubique est 3, &c.

Pour tirer donc telle racine qu'on voudra d'un nombre incomplexe litteral, il n'y a qu'à diviser l'exposant des lettres par l'exposant de la racine, & mettre le quotient pour nouvel exposant des mêmes lettres. Pour tirer la racine quarrée d'a^2, je divise 2 par 2, le quotient est 1, j'écris a^1 ou simplement a pour racine quarrée d'a^2 : pour tirer la racine quarrée d'a^4, je divise 4 par 2, le quotient est 2. j'écris a^2 pour racine quarrée d'a^4. Ainsi la racine quarrée d'a^6 est a^3 : la racine quarrée d'a^6b^4 est a^3b^2 : la racine cubique d'a^3 est a^1 ou a : la racine cubique d'a^6b^9 est a^2b^3 &c.

Lors que les exposans des lettres ne peuvent pas être divisez exactement par l'exposant de la racine, on marque le quotient en fraction : ainsi la racine quarrée de a^3 est $a^{\frac{3}{2}}$: la racine cubique de a^2 est $a^{\frac{2}{3}}$: la racine sixiéme de a^8b^4 est $a^{\frac{8}{6}}b^{\frac{4}{6}}$, & par reduction à moindres termes, cette même racine est $a^{\frac{4}{3}}b^{\frac{2}{3}}$,

&c.

& la racine ſixiéme de $a^8 b^3$ eſt $a^{\frac{4}{3}} b^{\frac{1}{2}}$.

Cette derniere eſpece d'extraction litterale eſt imparfaite, comme la diviſion eſt imparfaite, lors qu'elle ne ſe fait pas ſans reſte.

$b^{\frac{1}{2}}$ marque qu'il faut tirer la racine quarrée de b.

$b^{\frac{2}{3}}$ marque qu'il faut tirer la racine cubique du quarré de b, c'eſt à dire de b^2.

$a^{\frac{4}{3}}$ marque qu'il faut tirer la racine cubique ou racine troiſiéme du quarré de quarré, ou de la quatriéme puiſſance d'a, c'eſt à dire d'a^4, & ſelon les valeurs d'a & de b, cette extraction de racines eſt poſſible ou impoſſible, comme je le démontreray dans le chap. ſuivant.

Pour tirer telle racine qu'on voudra d'un nombre connu & exprimé par chifres, lors que le nombre des chifres n'eſt pas plus grand que l'expoſant de la racine cherchée. Il faut chercher ou par tâtonnement, ou par la Table cy-deſſus le nombre ſimple, qui étant multiplié par luy-même autant de fois moins une que l'expoſant de la racine cherchée a d'unitez produiſe le nombre donné, ou qui en approche le plus.

La racine quarrée de 49 eſt 7. La racine cubique de 512 eſt 8. La racine cinquiéme de 7776 eſt 6, & la ra-

cine cinquiéme de 59049 est 9.

La racine quarrée approchée de 52 est 7, & il reste 3.

La racine cubique approchée de 400 est 7, & il reste 57, parce que le cube de 7 est 343, & que le cube de 8 est 512. Or 400 nombre donné est entre 343 & 512, & il surpasse 343 de 57.

La racine cinquiéme de 50000 est 8, & il reste 17232.

Cette derniere espece d'extraction numerique est imparfaite, & comme la division imparfaite produit une nouvelle espece de nombres quon appelle *Fractions*. Cette extraction imparfaite produit une nouvelle espece de nombres qu'on appelle *incommensurables*.

Pour les exprimer exactement on se sert de ce caractere $\sqrt{}$. qui signifie *Racine*, & on met au dessus l'exposant propre de la racine cherchée.

Ainsi $\sqrt[2]{52}$ signifie la racine quarrée de 52. on écrit simplement $\sqrt{52}$ en sousentendant l'exposant 2.

$\sqrt[3]{400}$. signifie la racine cubique, ou la racine troisiéme de 400.

$\sqrt[5]{50000}$. signifie la racine cinquiéme de 50000.

J'ay dit *que le Nombre donné & connu ne devoit pas être exprimé par plus*

de chifres que l'exposant de la racine cherchée n'avoit d'unitez. Parce qu'autrement sa racine ne seroit pas un nombre incomplexe, & il ne s'agit icy que de ceux là. Ce que je démontre de cette maniere.

Tout nombre quarré plus grand que 100. a pour racine quarrée un nombre plus grand que 10. puis que le quarré de 10. est 100. & que plus un nombre est grand, plus son quarré est grand; or 100. est le plus petit des nombres exprimez par trois chifres, & 10. est le plus petit des nombres exprimez par deux chifres; donc tout nombre quarré exprimé par plus de deux chifres, a pour racine un nombre exprimé par plus d'un chifre.

Tout nombre cube plus grand que 1000, a pour racine cubique un nombre plus grand que 10. puisque le cube de 10 est 1000; or 1000 est le plus petit des nombres exprimez par quatre chifres, & 10 le plus petit nombre exprimé par deux chifres, donc tout nombre cube exprimé par plus de trois chifres a pour racine un nombre exprimé par plus d'un chifre, & ainsi de suite.

Enfin pour tirer telle racine qu'on voudra d'un nombre incomplexe, expri-

mé en parties par chifres & en partie par lettres (pourveu que le nombre des chifres ne soit pas plus grand que l'exposant de la racine cherchée) il n'y a qu'à tirer separement la racine du nombre & la racine des lettres, & joindre ces deux racines ensemble.

La racine quarrée de $9a^2$ est $3a$: la racine quarrée de $52a^2$ est $a\sqrt{52}$: la racine quarrée de $16a^3$ est $4a^{\frac{3}{2}}$: la racine quarrée de $17a^3$ est $a^{\frac{3}{2}}\sqrt{17}$.

La racine cubique de $125a^3$ est $5a$: la racine cubique de $7a^3$ est $a\sqrt[3]{7}$: la racine cubique de $125a^4$ est $5a^{\frac{4}{3}}$: la racine cubique de $7a^2$ est $a^{\frac{2}{3}}\sqrt[3]{7}$.

Ces expressions de l'extraction des racines sont des suites necessaires de l'expression de la multiplication & de la formation des puissances. Si le cube de $5a$ est $125a^3$. donc la racine cubique de $125a^3$ est $5a$, &c.

Je conclus de tout ce que je viens de dire que la formation des puissances est *une espece de multiplication simple ou reïterée, dans laquelle le multiplicateur est égal au premier nombre à multiplier*, & que l'extraction des racines *est une espece de division simple ou reïterée, dans laquelle le diviseur est égal au dernier quotient.*

Il y a cette difference essentielle entre la division & l'extraction des racines, que dans la division simple & reïterée, le diviseur & les diviseurs sont donnez, & on fait abstraction de l'égalité ou de l'inégalité de ces diviseurs entre eux & entre les diviseurs & les quotients, au lieu que dans l'extraction des racines le diviseur est toûjours le même, & il doit être égal au dernier quotient. C'est ce rapport d'égalité qui rend la formation des puissances, & l'extraction des racines susceptibles d'abbreviation, comme étant plus simple que le rapport d'inégalité, ou que tout rapport en général.

Dans la division les diviseurs sont donnez, & on ne connoît pas le rapport du diviseur au quotient.

Dans l'extraction des racines les diviseurs ne sont pas donnez; mais on connoît le rapport d'égalité qu'ils ont entre eux & avec le dernier quotient.

L'Extraction de la racine quarrée répond à la division simple.

L'Extraction de toutes les autres racines répond à la division reiterée.

Et ce que la division est par rapport à la soustraction; l'extraction des racines l'est par rapport à la division.

CHAPITRE III.

De la Formation des Puissances, & de l'extraction des racines des fractions incomplexes.

REGLE GENERALE.

Pour la Formation des Puissances.

ELevez le numerateur & le dénominateur à la puissance proposée.

Le quarré de $\frac{2}{3}$ est $\frac{4}{9}$: le quarré de $\frac{a}{b}$ est $\frac{aa}{bb}$: le quarré de $\frac{7a^3b^2}{8c^2f}$ est $\frac{49a^6b^4}{64c^4f^2}$.

Le cube de $\frac{2}{3}$ est $\frac{8}{27}$; le cube de $\frac{a}{b}$ est $\frac{a^3}{b^3}$: le cube de $\frac{2a^5b^2}{5c^2f}$ est $\frac{8a^{15}b^6}{125c^6f^3}$.

Car puisque suivant ce qui a été démontré dans le Livre precedent le produit de $\frac{2}{3}$ par $\frac{2}{3}$ est $\frac{4}{9}$, & le produit de $\frac{4}{9}$ par $\frac{2}{3}$ est $\frac{8}{27}$ &c. & puisque le produit de $\frac{a}{b}$ par $\frac{a}{b}$ est $\frac{aa}{bb}$, & que le produit de $\frac{aa}{bb}$ par $\frac{a}{b}$ est $\frac{a^3}{b^3}$ &c. Il est évident

que pour élever une fraction à quelque puissance que ce soit, il n'y a qu'à élever son numerateur & son dénominateur à cette même puissance.

REGLE GENERALE.

Pour l'extraction des racines des fractions incomplexes.

Tirez séparément la racine proposée du numerateur & du dénominateur, aprés avoir réduit la fraction à moindres termes.

La racine quarrée de $\frac{4}{9}$ est $\frac{2}{3}$: la racine quarrée de $\frac{aa}{bb}$ est $\frac{a}{b}$ &c. Ce qui est une suite necessaire de la Regle precedente.

La racine quarrée de $\frac{3}{9}$ est $\sqrt{\frac{3}{7}}$.

Autre Regle pour l'extraction des racines.

Multipliez le numerateur par une puissance du dénominateur, dont l'exposant soit plus petit d'une unité que l'exposant de la racine cherchée.

Tirez la racine de ce produit, & divisez cette racine par le dénominateur; le quotient sera la racine de la fraction cherchée.

Cette Regle eſt tres-utile pour tirer les racines approchées des fractions numeriques, qui n'ont pas des racines exactes.

Pour tirer la racine quarrée de $\frac{3}{8}$, je multiplie 3 par 8 & du produit 24. j'en tire la racine quarrée approchée qui eſt 5, & je dis que $\frac{5}{8}$ eſt la racine quarrée approchée de $\frac{3}{8}$.

Pour tirer la racine cubique de $\frac{7}{9}$, je multiplie le quarré du dénominateur par le numerateur, c'eſt à dire je multiplie 81 par 7, le produit eſt 567. dont la racine cubique approchée eſt 8. & je dis que $\frac{8}{9}$ eſt la racine cubique approchée de $\frac{7}{9}$.

Pour tirer la racine cinquiéme de $\frac{5}{8}$, je multiplie la quatriéme puiſſance de 8. qui eſt 4096 par 5. le produit eſt 20480, dont la racine approchée eſt 7. Car la cinquiéme puiſſance de 7. eſt 16807. & la cinquiéme puiſſance de 8 eſt 32768, & je prens 7 comme plus approchée. Je dis que la racine cinquiéme de $\frac{5}{8}$ eſt $\frac{7}{8}$.

Demonſtration.

Soit la fraction propoſée $\frac{a^2}{b^2}$, dont il faille tirer la racine ſuivant l'expoſant 2. il eſt évident que cette racine eſt

$\frac{a}{b}$ par la Regle precedente ; mais par celle-cy on trouve $\frac{ab}{b^2}$, qui eſt équivalente à la même fraction $\frac{a}{b}$.

Soit la fraction propoſée $\frac{a^3}{b^3}$, dont il faille tirer la racine cubique, cette racine eſt $\frac{a}{b}$; mais par la Regle on trouve $\frac{ab^2}{b^3}$, qui eſt équivalente à $\frac{a}{b}$.

Et généralement ſi la fraction eſt $\frac{a^p}{b^p}$ la racine ſera $\frac{a}{b}$, & on trouvera ſuivant la Regle la fraction équivalente $\frac{ab^{p-1}}{b^p}$, où p marque l'expoſant de la racine & des puiſſances. Par cette methode on n'a pas beſoin de réduire la fraction à moindres termes avant que d'extraire la racine.

CHAPITRE IV.

Demonstration générale des incommensurables.

IL faut que je démontre que tout nombre entier qui n'a point une racine exacte en entiers n'en a point en fraction ; par exemple 7 n'a point de racine quarrée en entiers, car 2 est trop petit & 3 est trop grand, donc si 7 pouvoit avoir une racine exacte, il faudroit que ce fut un nombre mixte entre 2 & 3, comme $2\frac{3}{4}$, ou $\frac{11}{4}$; $2\frac{57}{88}$ ou $\frac{233}{88}$, &c. c'est à dire que la racine quarrée de 7. pourroit être exprimée exactement par une fraction primitive $\frac{a}{b}$ dans laquelle a & b seroient premiers entre eux, & a contiendroit b deux fois avec un reste ; mais si $\frac{a}{b}$ étoit la racine de 7. $\frac{aa}{bb}$ seroit égal à 7. c'est à dire que aa seroit égal à $7bb$, & par consequent bb mesureroit aa, quoique b ne mesurât pas a, ce qui est impossible ; car si un nombre ne mesure pas un autre nombre, son quarré ne mesurera pas

son quarré, ni son cube ne mesurera pas son cube ni aucune puissance ne mesurera aucune puissance ; ce que je démontre ainsi.

J'ay déja prouvé en parlant des fractions decimales que *si un nombre étoit premier à deux autres, ce même nombre étoit aussi premier au produit de ces deux autres*. Si *b* est premier à *a* & à *c* ; *b* sera premier à *ac*, si 3 est premier à 5 & à 7, 3 sera premier à 35, & parce que la Démonstration est générale sans supposer aucun rapport particulier entre *a* & *c*, si on suppose $a = c$, il s'ensuit que *b* sera premier à *aa* ; que 3 sera premier à 25 ; mais parce que 25 est premier à 3 & à 3. il s'ensuit aussi que 25 sera premier à 3 fois 3 ou à 9 ; & puisque 25 est premier à 3 & à 9. 25 sera premier à 3 fois 9 ou à 27 ; & puisque 5 est premier à 3 & à 9, 5 sera aussi premier à 3 fois 9 ou à 27 ; & puisque 27 est premier à 5 & à 25, 27 sera aussi premier à 125. & ainsi de suite ; c'est à dire que si *b* est premier à *a*, *b* sera premier à *aa*, a^3, a^4, a^5, &c. & *bb* sera premier à *a*, *aa*, a^3, a^4 &c. & b^3 sera premier à *a*, *aa*, a^3 &c. & généralement toute puissance de *b*, sera premiere à toute autre puissance d'*a*, que si *a* & *b*

ne ſont pas premiers entre eux ; mais que *b*, ne meſure pas *a*, je dis encore qu'aucune puiſſance de *b* ne meſurera aucune puiſſance d'*a*. Car ſoit $a = cd$, & $b = ce$ où *c* repreſente la plus grande commune meſure d'*a* & de *b*, & *d*, & *e* ſont premiers entre eux. Si $c^p e^p$ meſuroit $c^p d^p$ en diviſant tout par c^p, donc e^p meſureroit d^p, ce que je viens de démontrer être impoſſible ; & ſi on ſuppoſe que $c^p e^p$ meſure $c^m d^m$; en diviſant tout par c^m ou par c^p, il s'enſuivroit, ou que e^p étant premier à d^m & à f^n meſureroit $f^n d^m$, ou que d^m étant premier à e^p & à f^n d^m meſureroit $f^n e^p$, ce qui eſt encore également impoſſible.

Donc tout nombre entier qui n'a point de racine exacte en entiers n'en a point en fraction, ce qu'il faloit démontrer.

Il s'enſuit auſſi que toute fraction réduite qui n'a pas pour numerateur & pour dénominateur deux puiſſances parfaites, n'a point de racine exacte dans ce même degré. La racine quarrée de 7 comparée à tout autre nombre luy eſt incommenſurable ; c'eſt à dire qu'elle n'a point de commune meſure avec cet autre nombre, pas même l'unité ; ce qui eſt évident puiſque $\sqrt{7}$ ne peut être exprimée exactement par aucun nombre, ni en entiers ni en fraction.

CHAPITRE V.

De la Formation des Puissances complexes.

ON peut regarder tout nombre complexe, comme composé seulement de deux parties, & chacune de ces deux parties, (si elle n'est pas incomplexe) peut être regardée comme composée encore de deux parties, & ainsi de suite jusques à ce que par cette subdivision, on ne trouve qu'un nombre complexe formé de deux parties incomplexes.

Ce nombre complexe formé de deux parties incomplexes s'appelle un *binome*, & ce mot est formé des deux mots Latins *bis*, qui signifie *deux fois*, & *nomen* qui signifie *nom*, parce que ces nombres complexes ont deux parties, dont chacune a son *nom*, ou son expression differente, tout binome peut être exprimé par $a + b$ ou par $a - b$.

Pour avoir une formule de la formation de tout les nombres complexes, il n'y a qu'à multiplier continuellement $a + b$ par $a + b$, par $a + b$, &c. & $a - b$ par $a - b$ par $a - b$.

Operation.

$a + b$ premiere puiſſance.
$a + b$

$aa + ab$
$\quad + ab + bb$

$aa + 2ab + bb$. ſeconde puiſſance.
$a + b$

$a^3 + 2aab + abb$
$\quad + aab + 2abb + b^3$

$a^3 + 3aab + 3abb + b^3$. 3eme puiſſance.
$a + b$

$a^4 + 3a^3b + 3a^2b^2 + ab^3$
$\quad + a^3b + 3a^2b^2 + 3ab^3 + b^4$

$a^4 + 4a^3b + 6aab^2 + 4ab^3 + b^4$. 4e p.
&c.

Operation.

$a - b$ premiere puiſſance.
$a - b$

$aa - ab$
$\quad - ab + bb$

$aa - 2ab + bb$. seconde puissance.
$a - b$

$a^3 - 2aab + abb$
$- aab + 2abb - b^3$

$a^3 - 3aab + 3abb - b^3$. 3eme puissance.
$a - b$

$a^4 - 3a^3b + 3aab^2 - ab^3$
$- a^3b + 3aab^2 - 3ab^3 + b^4$

$a^4 - 4a^3b + 6aab^2 - 4ab^3 + b^4$. quatriéme puissance, &c.

Table des Puissances.

1. $a + b$
2. $aa + 2ab + bb$
3. $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
4. $a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$
5. $a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$
6. $a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$
7. $a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 21a^3b^4 + 15a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$. &c.

1. $a - b$
2. $aa - 2ab + bb$
3. $a^3 - 3a^2b + 3abb - b^3$
4. $a^4 - 4a^3b + 6aabb - 4ab^3 + b^4$
5. $a^5 - 5a^4b + 10a^3bb - 10a^2b^3 + 4ab^4 - b^5$. &c.

Remarques ſur ces Tables.

1°. Les puiſſances d'$a - b$ ſont ſemblables aux puiſſances de même degré d'$a + b$, excepté que les puiſſances d'$a + b$ ont par tout le ſigne $+$, & que celles d'$a - b$ ont alternativement $+$ & $-$.

2°. Il y a autant de termes dans chaque puiſſance que l'expoſant de cette puiſſance a d'unitez $+ 1$. Le quarré a trois termes, le cube en a quatre, la quatriéme puiſſance en a 5, &c.

3°. Les expoſans des puiſſances d'a vont continuellement en diminuant à meſure que les expoſans de b augmentent, en ſorte que la ſomme des expoſans d'a & de b eſt toûjours égale à l'expoſant de la puiſſance entiere.

4°. Tous les termes ſans leurs abſolus ſont continuellement proportionnaux.

$aa. ab : ab. bb.$

$a^3. aab : aab. abb$ & $aab. abb : abb. b^3$.

5°. Les abſolus ſont les mêmes à égale

le distance des termes extremes ; & ainsi dés qu'on a la premiere ou plus grande moitié des termes, on a aussi le reste des termes.

6°. L'absolu du premier terme est l'unité : l'absolu du second terme est l'exposant même de la puissance : l'absolu du troisiéme terme est égal à la somme des absolus des seconds termes des puissances precedentes. Par exemple dans la sixiéme puissance l'absolu du troisiéme terme est 15, & 15 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 ; & ce même absolu est égal à la somme de l'absolu du second & du troisiéme terme de la puissance precedente. 15 = 5 + 10 : l'absolu du quatriéme terme est égal à la somme des absolus des troisiémes termes des puissances precedentes. Par exemple dans la septiéme puissance l'absolu du quatriéme terme est 35, & 35 = 1 + 3 + 6 + 10 + 15. Et ce même absolu est égal à la somme de l'absolu du troisiéme & du quatriéme terme de la puissance precedente 35 = 15 + 20. & ainsi de suite. Ce qui est évident par la formation même des puissances, ces absolus peuvent être arrangez en triangle de cette maniere.

1
1. 2. 1
1. 3. 3. 1
1. 4. 6. 4. 1
1. 5. 10. 10. 5. 1
1. 6. 15. 20. 15. 6. 1
1. 7. 21. 35. 35. 21. 7. 1
&c. &c.

Et il est aisé de continuer à l'infini, mais si l'on propose d'élever tout d'un coup sans multiplication & sans Table, le binome $a+b$, ou $a-b$ à une puissance quelconque, dont l'exposant soit p. On la trouvera par cette formule générale.

$$a^p \pm p a^{p-1} b^1 + \frac{pp-p}{2} a^{p-2} b^2 \pm \frac{p^3-3pp+2p}{6} a^{p-3} b^3 \text{ \&c.}$$

Et aprés avoir trouvé la premiere moitié des termes dans les puissances, dont l'exposant est impair, ou la plus grande moitié dans les autres puissances; c'est à dire aprés avoir trouvé $a^{p-n} b^n = a^{\frac{1}{2}p} b^{\frac{1}{2}p}$ ou $= a^{\frac{p+1}{2}} b^{\frac{p-1}{2}}$.

On réprendra dans un ordre contraire les mêmes absolus pour multiplier les puissances d'a & de b, également é-

loignées des deux extrêmes a^p & b^p.

Exemple.

Pour trouver la septiéme puissance d'$a+b$, parce que $7=p$, & $pp=49$. & $p^3=343$ &c. En substituant ces nombres dans la formule cy-dessus, on trouvera $a^7+7a^6b+21a^5bb+35a^4b^3$, & pour trouver les quatre derniers termes, je n'ay qu'à disposer les absolus 1. 7. 21. 35. en ordre contraire. 35. 21. 7. 1. & diminuer uniformement d'une unité les puissances d'a, & augmenter aussi uniformement d'une unité les puissances de b. Ainsi ces quatre derniers termes sont $35a^3b^4+21a^2b^5+7ab^6+1b^7$. & toute la puissance est trouvée. Toute la difficulté consiste à trouver les absolus; & ces absolus sont 1, $\frac{p}{1}$, $\frac{pp-p}{2}$, $\frac{p^3-3pp+2p}{6}$, $\frac{p^4-6p^3+11pp-6p}{24}$, &c.

Les numerateurs sont formez par la multiplication continuelle de 1 par p, par $p-1$, par $p-2$, par $p-3$, &c. Et les dénominateurs par la multiplication continuelle des nombres 1 par 2, par 3, par 4, &c.

Comme cette formule n'est pas abso-

lument necessaire pour la formation des puissances, & que la Demonstration me méneroit trop loin, je remets à la donner dans un Traité des nombres figurez.

Usage de la Table.

Il faut élever à la seconde puissance ce binome $8a^3b^2 + 7a^2b^2c$, je le considere comme si $8a^3b^2 = A$ & $7a^2b^2c = B$, & me servant de la formule $aa + 2ab + bb$, je quarre $8a^3b^2$ c'est $64a^6b^4 = AA$; je multiplie $8a^3b^2$ par $7a^2b^2c$, & je double le produit, c'est $112a^5b^4c = 2AB$; enfin je quarre $7a^2b^2c$, c'est $49a^4b^4cc = BB$. Le quarré de $8a^3b^2 + 7a^2b^2c$ est donc $64a^6b^4 + 112a^5b^4c + 49a^4b^4cc$.

Si l'on avoit proposé le binome $8a^3b^2 - 7a^2b^2c$, il auroit fallu se servir de la formule $aa - 2ab + bb$; & on auroit trouvé $64a^6b^4 - 112a^5b^4c + 49a^4b^4c^2$.

Autre Exemple.

Soit le trinome $8a^3b^2 - 7a^2b^2c + 10b^5$ qu'il faille élever à la seconde puissance, je considere ce trinome comme un binome, & je suppose $8a^3b^2 - 7a^2b^2c = A$ & $10b^5 = B$, & me servant de la

formule $aa + 2ab + bb$. Je cherche d'abord le quarré de $8a^3b^2 - 7a^2b^2c$, comme dans l'exemple precedent, & je trouve $64a^6b^4 - 112a^5b^4c + 49a^4b^4c^2 = AA$, en me servant de la formule $aa - 2ab + bb$. Je multiplie ensuite $8a^3b^2 - 7a^2b^2c$ par $10b^5$, & je double le produit, c'est $160a^3b^7 - 140a^2b^7c = 2AB$, enfin je quarre $10b^5$ c'est $100b^{10} = BB$; & le quarré cherché est $64a^6b^4 - 112a^5b^4 + 49a^4b^4c + 160a^3b^7 - 140a^2b^7c + 100b^{10}$.

Autre Exemple.

Soit le quadrinome proposé $2a + 3b - 5c + 10d$, qu'il faille élever à quelque puissance, je suppose $2a + 3b = A$ & $- 5c + 10d = B$, j'opere sur $2a + 3b$, comme si c'étoit $a + b$; & sur $- 5c + 10d$, comme si c'étoit $a - b$, &c.

CHAPITRE VI.

De la Resolution des Puissances numeriques.

LOrsque une puissance proposée en nombres entiers est exprimée par plus de chifres que l'exposant de la puissance n'a d'unitez, cette puissance & sa racine sont complexes, suivant ce que j'ay démontré au chap. 2; c'est à dire que la racine est exprimée par plus d'un chifre. On cherche ces chifres l'un aprés l'autre en commençant par le premier de gauche à droite, & qui est de plus grande valeur: ce premier chifre étant trouvé sert à trouver le second: les deux premiers considerez comme un seul nombre incomplexe servent à trouver le troisiéme: les trois premiers considerez comme un seul nombre incomplexe servent à trouver le quatriéme; & ainsi de suite jusques au dernier.

On ne considere donc jamais la racine que comme un binome $a+b$, où a represente le chifre ou les chifres trouvez, & b represente le chifre cherché.

J'appelle p l'exposant de la racine

cherchée, & q le nombre des chifres qui forment le nombre donné.

Regle Generale.

Pour l'extraction des racines.

1°. Divisez le nombre donné en autant de tranches que q contient de fois p, de sorte que chaque tranche à commencer de droite à gauche contienne autant de chifres que p contient d'unitez, excepté la premiere à gauche qui en peut contenir moins; c'est à dire divisez le nombre donné en tranches de deux chifres en deux chifres, si vous en voulez tirer la racine quarrée; divisez ce même nombre en tranches de trois chifres en trois chifres, si vous en voulez tirer la racine cubique, &c.

2°. Tirez la racine de la premiere tranche à gauche, cette racine sera le premier chifre de la racine cherchée. J'appelle ce premier chifre a.

3°. Otez sa puissance a^p de cette premiere tranche, & écrivez le reste s'il y en a un avec la tranche suivante, comme un dividende.

4°. Ecrivez comme diviseur sous ce dividende, la somme de toutes les au-

tres puiſſances d'a, qui ſe trouvent dans la formule de la puiſſance d'$a + b$, qui a p pour expoſant; c'eſt à dire écrivez $2a$ pour la racine quarrée : écrivez $3aa + 3a$ pour la racine cubique : écrivez $4a^3 + 6aa + 4a$ pour la racine quatriéme, &c. En obſervant que a étant des dixaines par rapport à b, il s'enſuit que aa ſont des centaines, que a^3 ſont des mille, &c. Le quotient b ſera le ſecond chifre de la racine cherchée; & il doit être pris plus petit qu'on ne le prendroit dans la diviſion ordinaire, parce qu'aprés avoir pris b il faut former tout le reſte de la puiſſance d'$a + b$ élevée à l'expoſant p; & l'ôter du dividende, c'eſt à dire que dans la racine quarrée il faut ôter $2ab + bb$: que dans la racine cubique il faut ôter $3aab + 3abb + b^3$, &c. & écrire le reſte s'il y en a un, avec la troiſiéme tranche, comme un nouveau dividende.

5°. Conſiderez ces deux premiers chifres trouvez, comme un nombre incomplexe de dixaines a, & le troiſiéme chifre cherché comme des unitez b; & operez pour trouver ce troiſiéme chifre, comme vous avez fait pour trouver le ſecond; & ainſi juſques au dernier.

S'il ne reſte rien la racine eſt exacte, s'il

s'il reste quelque chose la racine est aprochée.

Il faut toûjours prendre b, le plus grand qu'il est possible en satisfaisant à la Regle.

Les exemples éclairciront la Regle.

Premier Exemple.

Il faut tirer la racine quarrée de 1369.

Je le divise en deux tranches, & je dis la racine quarrée de 13 est 3. j'écris $3=a$ pour premier chifre de la racine cherchée.

2°. J'ôte 9 de 13. il reste 4, & j'ay pour dividende 469, sous lequel j'écris comme diviseur $2a=60$. & je dis en 46 combien de fois 6, il y est 7 fois; mais avant que d'écrire 7. je forme le reste du quarré d'$a+b$, c'est à dire $2ab+bb=420+49=469$.

3°. J'ôte 469 de 469 il ne reste rien, la racine quarrée de 1369 est 37 nombre cherché.

Operation.

	13|69	| *a* *b*	
		3 7	
aa	9		
reste	4|69	& dividende.	
2a	60	diviseur.	
2ab	420		
bb	49		
ôtez	469		
reste	000.		

Operation abbregée.

13|69	| 37
9	
4|69	
67	
000.	

Second Exemple.

Il faut tirer la racine quarrée de 140625.

Je le diviſe en trois tranches.

Je tire la racine quarrée des deux premieres 1416, comme dans l'exemple precedent; & je trouve que c'eſt 37 $=$ *a* & il reſte 3725, ſous lequel j'écris comme diviſeur $2a = 740$. & je dis en 37 combien de fois 7? il y eſt 5 fois; mais avant que d'écrire 5 au quotient, j'acheve de former le reſte du quarré d'$a + b$; c'eſt à dire $2ab + bb = 3725$ que j'ôte de 3725. il ne reſte rien.

La racine cherchée eſt 3725.

Operation.

	14|06|25 | 375	$3 = a$
		$7 = b$
ôtez *aa*	9	
reſte	5|06	$370 = a$
diviſ.	60	$5 = b$
$2ab$	4|20	$ab = 1850$
bb	49	$2ab = 3700$
ôtez	4|69	
reſte	37|25	
diviſ.	7|40	
$2ab$	3700	
bb	25	
ôtez	3725	
reſte	0000.	

Operation abbregée.

14|06|25	375
5|06	
67	
37|25	
7|45	
00 00.	

Troisiéme Exemple.

Il faut tirer la racine cubique de 185193.

Je le divise en deux tranches, & je tire la racine cubique de la premiere 185; c'est 5. j'écris 5 $= a$ pour premier chifre de la racine cherchée.

2°. De 185 j'ôte 125 cube de 5. il reste 60, & j'ay pour dividende 60193.

3°. Je prens $3a = 150$. que je multiplie par $a = 5$, afin d'avoir $3aa = 7500$. & j'ay pour diviseur $3aa + 3a = 7650$.

4°. Je divise 60193 par 7650, & avant que d'écrire le quotient $b = 7$. j'acheve le reste du cube d'$a +$

b. c'est à dire $3aab + 3abb + b3 = 60193$, que j'ôte de 60193. il ne reste rien & la racine cherchée est 57.

Operation.

	185|193 | 57	
a^3 . . .	125	
reste	60|193	
divis.	7|65 .	
$3aab$ . .	52|5 . .	
$3abb$	7|35 .	
b^3	343	
ôtez	60193	
reste	0000 0.	

5. $= a$

15. $= 3a$

5. .

75 . . $= 3aa$

765. $= 3aa + 3a$ divis.

75 . . $3aa$ 49 bb

7 b 15 $3a$

525 . . $3aab$ 245.

49

735. $3abb$

Quatriéme Exemple.

Il faut tirer la racine cubique de 16974593.

1°. Je le divise en trois tranches 16|974|593. La racine cubique de la premiere tranche 16 est 2. car le cube de 2 & 8, & le cube de 3 est 27. Je suppose $2 = a$ & ôtant $8 = a^3$ de 16. il me reste pour dividende 8974. & j'ay pour diviseur $3aa + 3a = 1260$.

Si c'étoit une division ordinaire je pourrois prendre 7 pour quotient ; car 7 fois 1260 ne produit que 8820, qui est plus petit que le dividende 8974 ; mais parce que ce diviseur n'est qu'un diviseur d'épreuve, & que prenant $7 = b$ je ne pourrois pas ôter $3aab + 3abb + b3$ de 8974. Je suppose $b = 6$ & je trouve qu'il est encore trop grand ; c'est pourquoy je suppose $b = 5$ & ôtant $3aab + 3abb + b^3 = 7625$ de 8974., il reste 1349. & j'ay pour nouveau dividende 1349593.

2°. Je suppose $25 = a$, & j'ay pour diviseur $3aa + 3a = 188250$. le quotient est $7 = b$,. & je trouve $3aab + 3abb + b^3 = 1349593$. d'où je conclus que la racine cherchée est 257.

Remarques.

1°. Il y a autant de chifres à la racine, qu'il y a de tranches dans la puissance.

2°. Lors que le dividende est plus petit que le diviseur, ou qu'on n'en peut pas ôter le reste de la puissance, il faut mettre un zero dans la racine, de même que dans la division ordinaire on met un zero dans le quotient.

3°. Lors que l'exposant de la puissance est un nombre composé, on peut extraire la racine par parties. Ainsi pour tirer la racine quatriéme, on peut tirer la racine par la formule $a^4 + 4a^3b + 6aabb + 4ab^3 + b^4$, qui est la formule propre à ce degré ; ou bien on peut tirer la racine quarrée, & ensuite la racine quarrée de cette racine, ce qui revient au même ; & pour tirer la racine sixiéme d'un nombre proposé, on peut s'y prendre de trois manieres. 1°. En tirant la racine directement suivant la formule propre de ce degré, qui est $a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2$,&c. 2°. En tirant la racine quarrée suivant la formule $2a + 2ab + bb$, & ensuite la racine cubique de cette racine suivant la formule $a3 +$

$3aab + 3abb + b^3$. 3°. En tirant la racine cubique, & enſuite la racine quarrée de cette racine cubique. La ſeconde maniere eſt la plus commode & en général, il faut commencer par l'expoſant premier qui eſt le plus ſimple, & continuer de même, parce qu'il eſt plus aiſé de tirer la racine quarrée d'un grand nombre; & enſuite la racine cubique d'un petit, que de tirer la racine cubique d'un grand nombre; & enſuite la racine quarrée d'un petit.

4°. Dans les diviſeurs d'épreuve on peut preſque negliger toutes les puiſſances d'*a*, excepté la premiere, ſur tout, lors que la puiſſance eſt d'un degré élevé; & que le chifre d'*a* ou ſon premier chifre approche de 9. ou qu'il eſt beaucoup plus grand que *b*, parce qu'alors ces puiſſances inferieures n'ont pas de rapport ſenſible à la premiere.

Ainſi dans le cube on peut ſe contenter de prendre $3aa$ pour diviſeur au lieu de $3aa + 3a$.

5°. On peut ſe ſervir de ce diviſeur d'épreuve pour trouver le reſte de la puiſſance à ôter: car multipliant $3aa + 3a$ par *b*, le produit eſt $3aab + 3ab$, & ſi on y ajoûte le produit de $3a$ par $bb - b$, qui eſt $3abb - 3ab$ plus le cube de

b ; on aura $3aab + 3abb + b^3$, ce qui abbrege l'operation.

Demonstration.

Si la puissance proposée est une puissance parfaite, & dont la racine soit exprimée par deux chifres $a + b = 37 = 30 + 7$, il est évident que sa puissance sera exprimée par $a^p + pa^{p-1}b^1 + \frac{pp - p}{2} a^{p-2}b^2$ &c. c'est à dire que si la puissance proposée est un quarré, elle sera exprimée par $aa + 2ab + bb = 900 + 420 + 49$, & si cette puissance est un cube, elle sera exprimée par $a^3 + 3aab + 3abb + b^3 = 27000 + 18900. + 4410 + 343$, &c. Or puisque a sont des dixaines, il est évident que aa sont des centaines, & a^3 des mille & ainsi de suite, donc si l'on divise le nombre donné en deux tranches, dont la premiere à droite soit de deux chifres pour le quarré : de trois chifres pour le cube, &c. La premiere tranche à gauche contiendra les centaines, & par consequent le quarré aa ; ou elle contiendra les mille, & par consequent le cube a^3 ; &c. donc en tirant la racine approchée de cette premiere tranche on trouvera

la valeur d'a; & je dis que cette valeur ne peut être ni trop grande ni trop petite d'une unité: je dis que $a = 30$ & que a ne peut être ni $= 40.$ ni $= 20.$ Car si $a = 40.$ quelque petit nombre qu'on suppose pour b, fut-ce $b = 0.$ le quarré d'$a + b$ sera ou 1600, ou un plus grand nombre; donc la premiere tranche seroit ou 16 ou un plus grand nombre contre l'hypothese, puisque la racine approchée de cette premiere tranche n'est que 3. & de même à proportion du cube & des autres puissances.

2°. a ne peut pas être plus petit que 3 dixaines, car si $a = 20$ quelque grand nombre qu'on suppose pour b fut-ce $b = 9.$ son quarré, son cube, &c. sera moindre que le quarré, le cube, &c. de 30. & par consequent la premiere tranche sera moindre que 9, que 27 &c. contre l'hypothese donc $a = 30.$

Ayant ôté a^p de toute la puissance il reste pa^{p-1} &c. c'est à dire il reste dans le quarré $2ab + bb$; dans le cube il reste $3a^2b + 3ab^2 + b^3$, &c.

Je me sers de ce reste pour trouver b, en considerant ce reste comme un dividende; & je prens pour diviseur la somme des puissances d'a que je connois; il faudroit diviser $2ab + bb$ par $2a + b$, afin

de trouver b pour quotient, mais parce que je ne connois pas b, je ne puis prendre pour diviseur d'épreuve que $2a$, & de même il faudroit, pour trouver b dans la racine cubique, diviser $3aab + 3abb + b^3$ par $3aa + 3ab + bb$. Mais parceque je ne connois qu'a, je prens pour diviseur d'épreuve $3aa + 3a$; & je prens un quotient tel que je puisse ôter du reste, le reste de la puissance; & il est évident que s'il ne reste rien la racine cherchée est $a + b = 30 + 7 = 37$. & s'il reste quelque chose on démontrera aisément comme cy-dessus, que la racine est imparfaite (entre 37 & 38) & qu'elle est incommensurable.

Que si la puissance proposée a plus de deux chifres pour sa racine, on démontrera comme cy-dessus qu'on trouve d'abord les deux premiers chifres; & que ces deux premiers, considerez comme un seul nombre incomplexe, font trouver le troisiéme, & ainsi de suite.

CHAPITRE VII.

De l'approximation des Racines numeriques.

LA Methode ordinaire pour approcher de la valeur des racines incommensurables est d'ajoûter au reste de l'extraction autant de tranches de zero que l'on veut, & de continuer l'extraction; & l'on trouve des fractions decimales à ajoûter au nombre entier de la racine approchée.

En ajoûtant une tranche de zero on erre de moins de $\frac{1}{10}$: en ajoûtant deux tranches on erre de moins de $\frac{1}{100}$: en ajoûtant trois tranches de zero on erre de moins de $\frac{1}{1000}$, & ainsi de suite.

Les tranches sont de deux zero dans le quarré: de trois zero dans le cube: & ainsi de suite.

Exemple.

En tirant la racine quarrée de 53, je trouve que c'est 7, dont le quarré est 49, & il reste 4.

Je veux trouver cette même racine à

moins de $\frac{1}{10}$ prés, c'est à dire je veux trouver un nombre dont le quarré soit plus petit que 53; mais qui en approche si fort qu'en ajoûtant seulement $\frac{1}{10}$ à la racine, le quarré soit plus grand que 53.

J'ajoûte deux zero au reste 4. & je continuë l'extraction sur 400 par la racine $70 = a$, & je trouve b plus grand que 2, & plus petit que 3. je dis que $7\frac{2}{10}$ est la racine cherchée, dont le quarré $51\frac{84}{100}$ est plus petit que 53. mais y ajoûtant $\frac{1}{10}$, le quarré de $7\frac{3}{10}$ est plus grand que 53; car c'est $53\frac{29}{100}$, donc la racine de 53 est entre $7\frac{2}{10}$ & $7\frac{3}{10}$, & l'erreur est moindre que $\frac{1}{10}$.

Operation.

	53	72.
	49	
	4	00
	1	42
reste	1	16.

La Regle générale seroit de multiplier la puissance proposée par la puissance semblable du nombre qui exprime l'er-

reur à laquelle on s'eſt fixé, & de diviſer la racine du produit par ce même nombre; car le quotient ſeroit la racine approchée & cherchée.

Par exemple ſi l'on vouloit tirer la racine quarrée de 53, à $\frac{1}{18}$ prés; il faudroit multiplier 53 par 324 quarré de 18, & diviſer la racine quarrée du produit, (17172,) qui eſt entre 131 & 132. Il faudroit dis-je diviſer 131 par 18, & le quotient $7\frac{5}{18}$ eſt la racine cherchée; mais à cauſe qu'il eſt incomparablement plus aiſé de multiplier par 100, par 10000, &c. & de diviſer par 10, par 100, &c. L'approximation de toutes la plus aiſée eſt celle des zero, & elle eſt preferable à toute autre approximation purement arbitraire.

Demonſtration.

Lors qu'on multiplie la puiſſance propoſée a^p, dont on cherche la racine a, lors dis-je qu'on la multiplie par une autre puiſſance ſemblable quelconque b^p, la racine du produit a^pb^p eſt ab, & en diviſant cette racine par b, il eſt évident que le quotient eſt a, racine cherchée exacte ou approchée.

Chapitre VIII.

Methode nouvelle pour l'approximation des Racines.

LA Methode que je viens d'expliquer est purement arbitraire, en voicy une qui est incomparablement plus courte, & qui est fondée sur la nature même des nombres. Je la publiay dans le Journal du 14. May 1691. & je la fis imprimer au mois de Decembre de la même année. L'origine & les principes de cette methode supposent plusieurs Regles sur la resolution des équations. Ainsi je me contenteray de donner icy la Regle avec quelques exemples, & l'on en trouvera la Demonstration dans les additions & éclaircissemens qui sont à la fin.

Regle générale.

Soit la puissance proposée $a^p \pm b$, où a represente la racine approchée en nombres entiers, & b represente le reste de l'extraction. Servez-vous pour le

quarré de la formule d'approximation $a \pm \frac{b}{2a}$: pour le cube de la formule $a \pm \frac{ab}{3a^3 \pm b}$: &c. & vous aurez la premiere racine approchée.

2°. Supposez $a \pm \frac{b}{2a}$, ou $a \pm \frac{ab}{3a^3 \pm b} = c$; & ôtez c^p de $a^p \pm b$, ou $a^p + b$ de c^p, le plus petit du plus grand & soit le reste $\pm d$.

3°. Prenez pour seconde racine approchée $c - \frac{d}{2c}$ dans le quarré, ou $a + \frac{4aab + bb}{8a^3 + 4ab}$: prenez pour seconde racine approchée dans le cube $c \pm \frac{cd}{c^3 \pm d}$; & ainsi de suite. Vous approcherez à l'infini de la veritable racine de $a^p \pm b$.

Exemple.

Le côté du quarré étant 1, le quarré de la Diagonale est 2. & par consequent pour avoir la grandeur de la Diagonale, il faut tirer la racine quarrée de 2. J'ay donc $a = 1$ & $b = 1$. & suivant la formule $a + \frac{b}{2a}$ j'ay pour seconde racine

cine approchée $1\frac{1}{2}$ ou $\frac{3}{2}$, & pour troisiéme racine j'ay $\frac{7}{5}$: pour quatriéme $\frac{17}{12}$: &c.

Second Exemple.

Pour tirer la racine cubique de 100 ; j'en tire d'abord la racine approchée en entiers, c'est $4 = a$, dont le cube est 64, & il reste $36 = b$. & suivant la formule $a + \frac{ab}{3a^3 + b}$, j'ay pour seconde racine approchée $4\frac{12}{19}$, dont le cube est $99\frac{2431}{6859}$, qui differe de 100, de moins d'une unité.

Cette difference est $\frac{4428}{6859}$, & si on suppose $4\frac{12}{19} = a$ & $\frac{4428}{6859} = b$, on trouvera par la même formule $a + \frac{ab}{3a^3 + b}$ une troisiéme racine incomparablement plus approchée, &c.

J'ay expliqué fort au long l'origine & l'usage de cette methode avec sa Demonstration dans la seconde Edition que j'en fis au mois de May 1692. imprimée in 4°. chez Jean Cusson; mais comme cette methode n'est pas absolument necessaire pour le calcul, & que cela me meneroit trop loin, si j'entreprenois icy de l'expliquer à fonds, je n'en diray pas d'avantage.

CHAPITRE IX.

Methode nouvelle pour l'Extraction des Racines.

CEtte Methode est une suite de ma methode d'approximation, & elle est indefiniment plus abbregée que la methode ordinaire.

Exemple.

Soit le cube proposé 817. 400. 375. au lieu de le diviser en trois tranches de trois chifres, comme dans la methode ordinaire, je ne le divise qu'en deux dont la premiere est 817, & la seconde 400375, je neglige entierement cette derniere tranche; & je ne cherche simplement que la racine approchée de 817. en me servant de la formule $a + \frac{ab}{3a^3 + b}$.

La racine cubique approchée de 817 est $9 = a$, dont le cube est 729, & il reste $88 = b$. Je multiplie 88 par 9, afin d'avoir le numerateur $ab = 792$. j'ajoûte 88 à 2187. triple du cube 729, & j'ay le dénominateur $3a^3 + b = 2275$.

La racine approchée de 817 est donc 9 $\frac{792}{2275}$, & parce que la racine cubique de 817400375 doit avoir trois chifres, j'ajoûte deux zero au numerateur, & je divise 79200 par 2275. le quotient est au plus prés 35, j'écris 35 de suite aprés 9; & je dis que 935 est la racine cubique du nombre proposé; ce qui se verifie en supposant 900 $= a$ & 35 $= b$. Car $3aab + 3abb + b^3 =$ 88400375.

Second Exemple.

Soit le cube proposé 696. 536483. 318640035073641037. dont la racine doit être exprimée par neuf chifres. Le plus habile Calculateur ne sauroit venir à bout en un mois de tirer cette racine par la methode ordinaire.

1°. Je divise ce cube en trois tranches. La premiere contient les trois premiers chifres de gauche à droite 696. La seconde tranche contient les six chifres suivans 536483. Enfin la troisiéme tranche contient les dix-huit derniers chifres, lesquels je neglige entierement comme inutiles dans ma methode.

2°. Je tire la racine cubique approchée des deux premieres tranches 696.

536483, comme dans l'exemple cy-dessus; & je trouve que cette racine est $886\frac{912603922}{2087549395}$ suivant la formule $a + \frac{ab}{3a3 + b}$.

3°. Pour trouver les six derniers chifres de ma racine, j'ajoûte six zero au numerateur; & je divise 912603922000000 par 2087. 549. 395. le quotient est 437166 que j'écris de suite aprés 886, & je dis que la racine cubique cherchée est 886437166 en entiers.

Troisiéme Exemple.

La duplication du cube est un des plus fameux Problemes de l'antiquité, & comme il a beaucoup de rapport à l'extraction de la racine cubique, je vais l'expliquer en peu de mots. Plutarque rapporte dans son Traitté du Génie de Socrate que Platon revenant d'Egypte rencontra des habitans de l'Isle de Delos, qui le consulterent sur un oracle d'Apollon, dont ils avoient mal pris le sens; ils avoient consulté ce Dieu sur le moyen d'être délivrez de plusieurs maux qui les accabloient; & la Prêtresse leur répondit que EUX ET LES GRECS OBTIENDROIENT CE QU'ILS DEMANDOIENT,

POURVEU QU'ILS E'LEVASSENT A APOLLON UN AUTEL DOUBLE DE CELUY QUI ESTOIT A DELOS.

Cet Autel étoit de figure cubique, c'est à dire de la figure d'un dé à joüer, & compris sous six quarrez égaux & perpendiculaires l'un à l'autre.

Dans le dessein d'obeïr à l'Oracle, ils dresserent un Autel qui avoit deux fois plus de longueur, deux fois plus de largeur, & deux fois plus de hauteur; mais ils reconnurent bien-tôt leur erreur: car ce dernier Autel étoit octuple, au lieu d'être double du premier; & ne sachant par où s'y prendre pour le rendre double, ils consulterent Platon comme un habile Geometre. Ce Philosophe donna à l'Oracle une intrepretation mysterieuse; & prétendit que les Dieux vouloient par là exciter les Grecs à l'étude de la Geometrie, & en général à l'étude des Sciences & des beaux Arts: que cette occupation feroit cesser parmy eux les troubles & les divisions, la principale cause de leurs malheurs.

On ne laissa pas de chercher à satisfaire l'Oracle dans le sens litteral, & le Probleme de la duplication du cube devint fameux parmi tous les Geometres.

Pour resoudre ce Probleme arithmeti-

quement, il faut trouver le rapport en nombres du côté du cube simple au côté du cube double; c'est à dire que si le côté du cube simple est 1. le côté du cube double sera $\sqrt[3]{2}$. Il faut donc tirer la racine cubique approchée de 2. & me servant de la formule $a + \frac{ab}{3a^3 + b}$, je trouve $a = 1$. & $b = 1$. donc la seconde racine approchée est $1\frac{1}{4}$, dont le cube $1\frac{61}{64}$ est presque égal à 2; la difference est $\frac{3}{64}$, que je suppose égale à b, & $1\frac{1}{4}$ ou $\frac{5}{4} = a$; je trouve pour troisiéme racine approchée $\frac{1905}{1512}$ ou $\frac{635}{504}$, & cette troisiéme racine approche si fort, que si l'on eut élevé un second Autel semblable au premier, & dont le côté eut été au côté du premier, comme 635 à 504, Apollon auroit eu mauvaise grace de chicaner là dessus. Car supposant que le premier Autel eut 7 pieds en tout sens, c'est à dire 1008 lignes. Le côté de l'Autel double auroit du être de 1270 lignes, c'est à dire de 8 pieds, 9 pouces & 10 lignes. Le premier Autel auroit eu de solidité 343 pieds cubes, ou une toise & 127 pieds cubes: le second Autel auroit eu 2048383000 lignes cubes; c'est à dire 685 pieds, 1726 pouces, 1432 lignes cubes. Or pour être preci-

sément double, cette solidité devroit être de 686 pieds cubes, & il s'en faut environ un pouce & un sixiéme; c'est à dire beaucoup moins de la millioniéme partie du tout, ce qui est une erreur insensible.

Autre resolution du même Probleme.

Soit le côté du cube simple $= 1$, & le côté du cube double $= \sqrt[3]{2}$. je multiplie le cube 2 par 125 cube de 5, & je tire la racine cubique approchée de 250. La raison pourquoy je multiplie par 125 plûtôt que par tout autre nombre cube, c'est afin que la premiere tranche soit plus grande que 193, & c'est une preparation necessaire dans ma methode; or 125 est le plus petit cube qui multiplié par 2, produise un nombre plus grand que 193, & plus petit que 1000.

La racine cubique approchée de 250 est $6 = a$, & il reste $34 = b$, & suivant la formule $a + \frac{ab}{3a^3 + b} = 6 + \frac{204}{682}$ ou $6 + \frac{102}{341}$, & ajoûtant (par Regle générale) deux zero au numerateur, j'ay pour seconde racine approchée $630 - \frac{30}{141}$. Je prens 630 qui approche par excez, plûtôt que 629. qui approche

par défaut, parce que l'excez est beaucoup moindre que le défaut. Le cube de 630 est 250047000 qui surpasse 250.000.000. de 47000. je suppose 630 = a & 47000 = b, je me sers de la formule d'approximation par excez $a - \frac{ab}{3aa - b}$, & je trouve pour troisiéme racine approchée 630 — $\frac{29610}{750094}$ ou 630 — $\frac{14805}{375047}$. J'ajoûte (par Regle générale) six zero au numerateur, & je trouve 630.000000. — 03.9475. c'est à dire 629.960.525. dont la cinquiéme partie 125992.105. est la racine cubique approchée de 2000.000.000.000.000.000.000.000. Ainsi le côté du cube simple étant 100.000.000. le côté du cube double est entre 125992.105 & 125992104. & si l'on veut trouver une quatriéme racine approchée, on supposera 629.960.125. = a, & 375.769.183.197.03125 = b. Car c'est l'excez du cube de 629.960.125. sur 250.000.000.000.000.000.000.000.000. On se servira encore de la formule $a - \frac{ab}{3aa - b}$; & on ajoûtera (par Regle générale) dix-huit zero au numerateur, &c. Pour avoir à moins d'une unité prés le côté du cube double,

le

le côté du cube simple étant 100.000.000.000.000.000.000.000.000.
& on trouvera de même en général le rapport des côtez de tous les corps semblables, pour les augmenter ou diminuer en raison donnée de nombre à nombre, ce qui est d'un tres grand usage; sur tout si l'on joint à cette methode celle que je donne dans *le triangle des rapports* pour trouver les plus petits nombres qui expriment au plus prés une raison donnée.

Quatriéme Exemple.

Un nombre est moyen proportionnel entre deux autres, lors que le premier de ces nombres est au second, comme le second est au troisiéme. Ainsi 6 est moyen proportionnel entre 4 & 9. Car 4. 6 : 6. 9. & 4. est les deux tiers de 6. comme 6 est les deux tiers de 9.

Pour trouver un moyen proportionnel entre deux nombres donnez, il n'y a qu'à multiplier ces deux nombres l'un par l'autre & tirer la racine quarrée du produit. Multipliez 4 par 9. & tirez la racine quarrée du produit 36, qui est 6. moyen proportionnel entre 4 & 9.

Deux nombres sont moyens proportionnaux entre deux autres, lorsque comme

le premier de ces deux autres est au premier des deux moyens, ainsi le premier des deux moyens est au second; & ainsi le second des deux moyens est au dernier. 12 & 18 sont moyens proportionnaux entre 8 & 27. parce que 8. 12 : 12. 18. & 12. 18 : 18. 27.

Pour trouver deux moyens proportionnaux entre deux nombres, il faut multiplier le quarré du premier par le second, & tirer la racine cubique du produit ; ce sera le premier des deux moyens proportionnaux ; multipliez le quarré du second par le premier, & tirez la racine cubique du produit ; ce sera le second des deux moyens proportionnaux.

Pour trouver deux moyens proportionnaux entre 8 & 27. Je multiplie le quarré de 8. qui est 64 par 27, & du produit 1728. j'en tire la racine cubique 12. c'est le premier des deux nombres cherchez ; je multiplie le quarré de 27. qui est 729 par 8. & du produit 5832, j'en tire la racine cubique 18. c'est le second des deux moyens proportionnaux cherchez.

Trois nombres sont moyens proportionnaux entre deux autres, lorsque le premier de ces deux autres est au premier des trois moyens, comme ce premier des trois moyens est au second moyen, &

comme ce second moyen est au troisiéme, & comme ce troisiéme est au dernier. Ainsi 16. 24. 36, 54, 81. sont cinq nombres continuellement proportionnaux 16 & 81. sont les extrêmes; 24, 36, 54, sont les trois moyens.

Pour trouver trois moyens proportionnaux entre deux nombres, il faut multiplier le cube du premier par le second; le quarré du premier par le quarré du second; & le premier par le cube du second, & tirer la racine quatriéme de chacun de ces trois produits; ces trois racines seront les trois nombres moyens cherchez.

On trouvera 4 moyens proportionnaux en tirant 4 racines cinquiémes: cinq moyens proportionnaux en tirant 5 racines sixiémes: & ainsi de suite.

Demonstration.

Entre a & b le moyen proportionnel est $\sqrt{ab}$. Car soit $a = cc$ & $b = dd$. donc $ab = ccdd$ & $\sqrt{ab} = cd$. Or $cc . cd : cd . dd$ (car le produit des extrêmes, $ccdd$, est égal aux produits des moyens, $ccdd$,) donc $a . \sqrt{ab} : \sqrt{ab} . b$.

Entre a & b les deux moyens proportionnaux sont $\sqrt[3]{aab}$, & $\sqrt[3]{abb}$. Car soit $a = c^3$ & $b = d^3$, donc $aab = c^6 d^3$ &

$ab^2 = c^3d^6$, donc $\sqrt[3]{aab} = ccd$ & $\sqrt[3]{ab^2} = cdd$. or $c^3 . ccd : ccd . cdd$. & $ccd . cdd : cdd . d^3$. donc $a . \sqrt[3]{aab} : \sqrt[3]{aab} . \sqrt[3]{abb}$ & $\sqrt[3]{aab} . \sqrt[3]{abb} : \sqrt[3]{abb} . b$ &c. ce qu'il falloit démontrer.

Remarque.

Si a & b ſont des quarrez ou des équimultiples de quarrez, on trouvera un moyen proportionnel en multipliant les côtez de ces quarrez, & le produit par l'équimultiplicateur; entre 4 & 9. je multiplie 2 par 3. le produit 6 eſt le moyen: entre 20 & 45. multiples de 4. & de 9. par 5, je multiplie 2 par 3, par 5. le produit 30 eſt le moyen.

Mais ſi a & b ne ſont pas quarrez ou équimultiples de quarrez, on ne pourra pas trouver un nombre moyen exact.

Si a & b ſont des cubes parfaits, ou des équimultiples de cubes parfaits, on trouvera les deux moyens proportionnaux en multipliant reſpectivement le côté de l'un par le quarré de l'autre, & le produit par l'équi-multiplicateur; entre 8 & 27. je multiplie 4 par 3, & 9 par 2. les produits 12 & 18 ſont les moyens: entre 40 & 135 multiples de 8 & de 27 par 5; je multiplie 4 par 3 par 5. c'eſt 60,

& 9 par 2, par 5, c'est 90; 60 & 90 sont les deux moyens entre 40 & 135, &c.

On trouvera tant de moyens proportionnaux qu'on voudra entre deux nombres donnez.

S'il faut trouver 7 moyens proportionnaux entre a & b. J'écris a^7, a^6b^1, a^5b^2, a^4b^3, a^3b^4, a^2b^5, ab^6 b^7. & je tire les racines septiémes des 7 termes moyens a^6b^1, a^5b^2, &c. ce sont les 7 termes cherchez.

Pour tirer la racine quarrée d'un nombre suivant ma Methode, il suffit de tirer la racine approchée de la premiere moitié, & une simple division donne la derniere moitié.

Pour tirer la racine cubique il suffit de tirer la racine cubique approchée du du premier tiers, & une simple division donne les derniers deux tiers.

Pour tirer la racine quatriéme, il suffit de tirer la racine quatriéme approchée du premier quart; pour tirer la racine cinquiéme, il suffit de tirer la racine cinquiéme approchée de la premiere cinquiéme partie, &c. & on trouve tout le reste par une simple division; ce qui abbrege indefiniment le calcul; & qui l'abbrege d'autant plus que le nombre donné est plus grand & la puissance plus élevée.

J'expliqueray cette methode à fonds

dans le receüil des nouvelles découvertes.

Chapitre X.

De l'extraction des racines des Puissances litterales complexes.

Il faut tirer la racine quarrée de ce nombre complexe $9xx + 30x + 25$ je l'arrange suivant la formule $aa + 2ab + bb$. & je suppose la plus haute puissance de la lettre principale égale au premier terme aa : c'est à dire $9xx = aa$. & la seconde puissance de la même lettre principale, égale au second terme $2ab$. c'est à dire $30x = 2ab$. & enfin $25 = bb$.

Ensuite je tire la racine quarrée de $9xx = aa$ pour avoir $3x = a$ premier terme de la racine pour trouver b. Je considere que divisant $2ab$ par $2a$, le quotient est b, donc divisant $30x = 2ab$ par $6x = 2a$, le quotient 5 sera égal au second terme cherché b ; pour m'en assurer je quarre 5. c'est $25 = bb$ conformement à l'hypothese d'où je conclus que la racine quarrée de $9xx + 30x + 25$ est $3x + 5$.

Si le nombre proposé eut été $9xx -$ $30x + 25$, il auroit fallu se servir de la formule $aa - 2ab + bb$, & on auroit trouvé pour racine $3x - 5$.

Si le nombre proposé eut été $9xx +$ $30x + 7$. on auroit trouvé que la racine est incommensurable ; la premiere racine approchée auroit été $3x + 5$. la seconde racine approchée auroit été $3x$ $+ 5 - \frac{18}{6x + 10}$, &c.

Et on peut continuer d'approcher à l'infini dans l'extraction, de même que dans la division imparfaite.

Il faut tirer la racine quarrée de $169x^4 - 130x^3 + 207xx - 70x +$ 49. Je suppose $169x^4 = aa$ donc $a =$ $13xx$, je divise $- 130x^3$ par $+ 26xx$ $= 2a$, & j'ecris le quotient $- 5x = b$, je quarre $- 5x$ c'est $+ 25xx$, que j'ôte de $+ 207xx$; il reste $+ 182xx - 70x$ $+ 49$. Je suppose $13xx - 5x = a$, & $182xx - 70x = 2ab$, je divise $182xx - 70x$ par $26xx - 10x = 2a$; & je trouve pour quotient $+ 7 = b$, que je quarre c'est $+ 49 = bb$, d'où je conclus que la racine quarrée de $169x^4 -$ $130x^3 + 207xx - 70x + 49$ est $13xx - 5x + 7$.

Il faut tirer la racine cubique de

$343x^3 - 1470xx + 2100x - 1000$. Je suppose $343x^3 = a^3$. $-1470xx = -3aab$. $+2100x = 3abb$ & $1000 = b^3$, suivant la formule $a^3 - 3aab + 3abb - b3$. & je trouve pour racine $7x - 10$.

On tirera de même les racines des fractions complexes, ce qui n'a aucune difficulté differente de l'extraction des nombres complexes & des fractions simples.





LIVRE V.

Des Incommensurables.

CHAPITRE I.

De la reduction des incommensurables à moindres termes par division.

L'Extraction imparfaite des racines produit les incommensurables, comme la division imparfaite produit les fractions; ils ont aussi comme les fractions des operations qui leur sont propres, & que je comprens sous le nom de reduction; & des operations qui leur sont communes avec le reste des nombres comme l'addition, la soustraction, &c. Reduire par division un nombre incommensurable à ses moindres termes; c'est trouver le plus grand nombre entier qui le mesure. Ainsi $\sqrt{18}$ est reduit à ses moindres termes, $3\sqrt{2}$, lors qu'on a trouvé 3 qui mesure $\sqrt{18}$ par 2. Car $3 = \sqrt{9}$ & $\sqrt{18}$ étant divisé par $\sqrt{9}$ donne pour quotient $\sqrt{2}$, de même $\sqrt{675}$ se reduit à

$15\sqrt{3}$. Car $15 = \sqrt{225}$ & 3 fois 225 $= 675$. de même $\sqrt[3]{54} = 3\sqrt[3]{2}$, car $3 = \sqrt[3]{27}$ & 2 fois $27 = 54$.

Pour réduire un nombre incommensurable à sa plus simple expression. Il faut le diviser continuellement autant de fois qu'il est possible par la suite des nombres premiers 2. 3. 5. 7. &c. & garder à part les diviseurs exacts, qui divisent autant de fois que l'exposant de la racine a d'unitez.

Il faut ensuite multiplier continuellement ces diviseurs l'un par l'autre ; le produit sera le nombre rationnel hors du signe radical, & qu'il faut écrire le premier de gauche à droite, comme multiplicateur.

Le reste de la division multiplié continuellement donnera la partie irrationnelle qu'il faut écrire aprés le signe radical, comme nombre à multiplier ; & le nombre donné sera réduit à ses moindres termes.

Si aprés avoir tenté la division par tous les nombres premiers au dessous de la racine du nombre donné, il ne s'en trouve aucun qui mesure le nombre donné continuellement autant de fois que l'exposant de la racine a d'unitez ; le nombre donné est irreductible, & c'est un

nombre premier incommensurable dans ce degré.

Exemple.

Il faut réduire $\sqrt{675}$ à moindres termes.

Je divise 675 par 3, le quotient est 225 que je divise encore par 3, le quotient est 75, que je divise encore par 3 le quotient est 25, que je divise par 5 le quotient est 5; les diviseurs sont donc 3. 3. 3. 5. 5. & parce que c'est un incommensurable du second degré, je prens 3 & 5 pour produisants, & j'écris $15\sqrt{3} = \sqrt{675}$.

Second Exemple.

Il faut réduire $\sqrt{2205}$ à sa plus simple expression.

Je divise 2205 par 3, le quotient est 735 que je divise par 3, le quotient est 245 que je ne puis plus diviser par 3. Je divise 245 par 5, le quotient est 49. dont les diviseurs sont 7 & 7.

Les diviseurs primitifs de 2205 sont donc 3, 3, 5, 7, 7, & j'écris 3 fois 7 ou $21\sqrt{5} = \sqrt{2205}$.

Troisiéme Exemple.

Il faut réduire à ses moindres termes $\sqrt[3]{1080}$.

Je divise 1080 par 2. & le quotient 540 par 2, & le quotient 270 encore par 2. le quotient est 135 que je divise par 3, & le quotient 45 par 3, & le quotient 15 par 3, le dernier quotient est 5 nombre premier.

Les diviseurs sont donc 2, 2, 2, 3, 3, 3. 5, & j'écris $6\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{1080}$.

Quatriéme Exemple.

Il faut réduire $\sqrt[3]{180}$.

Ses diviseurs primitifs sont 2, 2, 3, 3, 5. d'où je conclus que ce nombre est irreductible dans son degré.

CHAPITRE II.

De la reduction des incommensurables à moindres termes par extraction de racines.

Lorsque l'exposant de l'incommensurable n'est pas nombre premier, il

arrive quelquefois qu'on peut tirer la racine du nombre proposé suivant un ou plusieurs exposans qui mesurent l'exposant donné, & pour lors on peut abbreger l'expression de l'incommensurable.

Exemple.

Il faut réduire $\sqrt[6]{169}$.

L'exposant 6 est formé des exposans 2 & 3. j'essaye l'extraction suivant l'exposant 2. c'est à dire je tire la racine quarrée de 169 c'est 13, & j'écris $\sqrt[3]{13} = \sqrt[6]{169}$.

Second Exemple.

Il faut réduire $\sqrt[6]{1728}$.

Je tente l'extraction cubique de 1728, & je trouve 12. j'écris $\sqrt{12}$ & par division $2\sqrt{3} = \sqrt[6]{1728}$.

Troisiéme Exemple.

Il faut réduire $\sqrt[6]{1512}$.

Je tente d'abord la reduction par division suivant l'exposant 2. & je trouve $6\sqrt{42}$, & j'écris $\sqrt[3]{6\sqrt{42}} = \sqrt[6]{1512}$.

Ou bien je tente la reduction par division suivant l'exposant 3, & je trouve $6\sqrt[3]{7}$, & j'écris $\sqrt{6\sqrt[3]{7}} = \sqrt[6]{1512}$.

CHAPITRE III.

De la reduction à même dénomination.

IL faut réduire $\sqrt{5}$ & $\sqrt[3]{7}$ à même dénomination.

Je multiplie 5 cubiquement, & 7 quarrément, & j'écris $\sqrt[6]{125}$ & $\sqrt[6]{49}$. qui sont des expressions de même dénomination, & équivalentes aux deux $\sqrt{5}$ & $\sqrt[3]{7}$; car il y a ce rapport entre les incommensurables (qui sont formez par l'extraction imparfaite) & les fractions qui sont formées par la division imparfaite) que l'un & l'autre ont une infinité d'expressions équivalentes. L'exposant du signe radical tient lieu de dénominateur dans les incommensurables. Ainsi $\sqrt{9} = \sqrt[3]{27} = \sqrt[4]{81} = \sqrt[5]{243} = \sqrt[6]{729}$, &c.

Et $\sqrt[2]{5} = \sqrt[6]{125}$.

Second Exemple.

Il faut réduire $\sqrt[4]{7}$ & $\sqrt[6]{10}$ à même dénomination. Les exposans 4 & 6 ont pour plus grande commune mesure 2. & divisant 6 par 2 le quotient est 3. c'est pourquoy je multiplie $\sqrt[4]{7}$ cubiquement,

c'est $\sqrt[12]{343}$, & parce que divisant 4 par 2 le quotient est 2, je multiplie $\sqrt[6]{10}$ quarrément, c'est $\sqrt[12]{100}$. & j'ay $\sqrt[12]{343} = \sqrt[4]{7}$, &c. $\sqrt[12]{100} = \sqrt[6]{10}$.

Troisiéme Exemple.

Il faut réduire $\sqrt[3]{7}$ & $\sqrt[12]{20}$ à même dénomination.

L'exposant 12 est multiple de l'exposant 3 par 4. c'est pourquoy j'éleve $\sqrt[3]{7}$ à la quatriéme puissance, & j'écris $\sqrt[12]{2401} = \sqrt[3]{7}$. & la reduction est faite.

CHAPITRE IV.

Methodes pour trouver si deux nombres incommensurables sont commensurables entre eux.

JE veux savoir si $\sqrt{50}$ & $\sqrt{18}$ sont commensurables entre eux.

J'écris $\frac{50}{18}$ en fraction que je reduis à ses moindres termes, c'est $\frac{25}{9}$; & parce que 25 & 9 sont des quarrez parfaits. Je conclus que ces nombres sont commensurables entre eux; c'est à dire qu'il sont entre eux comme nombre à nombre

Car 50 = 2 fois 25 donc $\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ & 18 = 2 fois 9, donc $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$. or $5\sqrt{2}$ est à $3\sqrt{2}$, comme 5 est à 3; car soit $\sqrt{2} = a$ donc $5\sqrt{2} = 5a$ & $3\sqrt{2} = 3a$; donc $5\sqrt{2} . 3\sqrt{2} : 5a . 3a : 5 . 3$.

On trouvera de même que $\sqrt[3]{1512}$ & $\sqrt[3]{875}$ sont commensurables entre eux, quoique incommensurables absolument & pris separément, parce que la fraction $\frac{1512}{875} = \frac{216}{125}$, & que 216 est le cube de 6, & 125 le cube de 5. d'où je conclus que $\sqrt[3]{1512} = 6\sqrt[3]{7}$, & $\sqrt[3]{875} = 5\sqrt{7}$. donc ces nombres sont entre eux, comme 6 à 5.

Par cette methode il faut se servir de la division, pour trouver la plus grande commune mesure; & faire ensuite deux extractions de racines.

En voicy une où il ne faut faire qu'une multiplication & une extraction de racines.

Pour savoir si $\sqrt{50}$ & $\sqrt{18}$ sont commensurables, je multiplie 50 par 18, & si le produit 900 est un quarré parfait, ces nombres sont commensurables; autrement ils sont incommensurables. La racine de 900 est 30. Car tous nombres commensurables peuvent être exprimez par $a\sqrt{b}$, & $c\sqrt{b}$ où b represente la partie commune irrationnelle ou incommensurable

mensurable ; & les lettres a & c representent les nombres rationnaux. Or $a\sqrt{b}$ par $c\sqrt{b}$ produit $ac\sqrt{bb}$; & puisque b n'est irrationnel que du second degré, il est évident $\sqrt{bb} = b$; & que le produit est tout rationnel & égal à acb.

Pour savoir si $\sqrt[3]{16}$ & $\sqrt[3]{54}$ sont commensurables , je multiplie le quarré du plus petit 16, qui est 256 par 54. & parce que le produit est un cube parfait. Je conclus que les nombres donnez sont commensurables ; car $a\sqrt[3]{b}$ & $c\sqrt[3]{b}$ representent tous les incommensurables du troisiéme degré commensurables entre eux ; or $aa\sqrt[3]{bb}$ par $c\sqrt[3]{b}$ produit $aac \sqrt[3]{b^3} = aacb$; & $cc\sqrt[3]{bb}$ par $a\sqrt[3]{b}$ produit $acc\ \sqrt[3]{b^3} = accb$. soit $\sqrt[3]{b} = d$. $a\sqrt[3]{b} = ad$, $c\sqrt[3]{b} = cd$. $aadd$ par cd produit $aacd^3$, or $d^3 = b$ donc &c. Et généralement soit $a\sqrt[p]{b}$ & $c\sqrt[p]{b}$ si l'on multiplie $a^{p-1}\sqrt[p]{b^{p-1}}$ par $c\sqrt[p]{b^1}$, le produit sera rationnel & égal à $a^{p-1}cb$. Car $\sqrt[p]{b^{p-1}}$ par $\sqrt[p]{b^1}$ produit $\sqrt[p]{b^p} = b$; & de même si l'on multiplie $c^{p-1}\sqrt[p]{b^{p-1}}$ par $a\sqrt[p]{b}$, le produit sera $c^{p-1}ab$.

Quand on a trouvé que les nombres donnez sont commensurables, on trouvera aussi leur rapport ; & on les réduira en même temps à moindres termes, qui est ce qu'on cherche principalement. Par

Ee

exemple $\sqrt{50}$ & $\sqrt{18}$ ſont commenſurables, parce que la racine de leur produit 900 eſt 30. Je reduis 30 & 18 à leurs plus petits termes; c'eſt 5 & 3. je dis que $\sqrt{50}$ eſt à $\sqrt{18}$ comme 5 à 3. $\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ & $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.

$\sqrt[3]{16}$ & $\sqrt[3]{54}$ ſont commenſurables, parce que la racine cubique du produit du quarré de l'un par l'autre 13824 (il eſt plus commode de prendre le quarré du plus petit) eſt 24. Je reduis 24 & 16 à leurs plus petits termes, c'eſt 3 & 2. & je dis que $\sqrt[3]{54}$ eſt à $\sqrt[3]{16}$, comme 3 à 2; car diviſant le plus grand 54 par le cube de 3, c'eſt à dire par 27 le quotient eſt 2. & diviſant 16 par 8 cube de 2, le quotient eſt encore 2. donc $\sqrt[3]{54} = 3\sqrt{2}$ & $\sqrt[3]{16} = 2\sqrt[3]{2}$.

Ce que je démontre ainſi généralement ſoit $a\sqrt[p]{b}$ & $c\sqrt[p]{b}$ deux nombres, quelconques incommenſurables & commenſurables entre eux. Ils ſont donnez ſous cette forme $\sqrt[p]{a^p b}$, & $\sqrt[p]{c^p b}$. Si l'on éleve l'un des deux (& il eſt plus commode de prendre pour cela le plus petit) comme $\sqrt[p]{a^p b}$ à la puiſſance $p - 1$. & qu'on multiplie cette puiſſance par $\sqrt[p]{c^p b}$, le produit ſera $a^{p-1} cb$. Je reduis $a^{p-1} cb$ & $a^p b$ à moindres termes; c'eſt a & c, je diviſe $a^p b$ par a^p, & $c^p b$ par c^p, les

deux quotients sont chacun p. & j'écris $a\sqrt{p}b$ & $c\sqrt{p}b$ nombres cherchez & réduits.

J'ay supposé dans cette methode que l'on savoit multiplier un nombre incommensurable par luy-même & par un autre nombre ; c'est à dire que $\sqrt{p}a$ par $\sqrt{p}a$ produit $\sqrt{p}aa$, & que $\sqrt{p}a$ par $\sqrt{p}b$ produit $\sqrt{p}ab$. Pour le démontrer je suppose comme évident que $\sqrt{p}a^p = a$: que $\sqrt{2}a^2 = a$: que $\sqrt{3}a^3 = a$: &c. de même que dans les fractions $\frac{ap}{p} = a$.

Si l'on suppose donc comme on le peut toûjours $a = c^p$ & $b = d^p$, on aura $\sqrt{p}a = \sqrt{c^p} = c$ & $\sqrt{p}b = \sqrt{p}d^p = d$. donc le produit $cd = \sqrt{p}c^pd^p = \sqrt{p}ab$. ce qu'il falloit démontrer.

On peut aussi démontrer plus generalement, que si on éleve $a\sqrt{p}b$ à une puissance quelconque $p - d$, & qu'on éleve $c\sqrt{p}b$ à la puissance d, le produit de ces deux puissances sera rationnel ; & par ce produit on pourra réduire à moindres termes les deux nombres donnez, mais la methode que je viens d'expliquer est la plus simple de toutes.

CHAPITRE V.

De l'Addition des nombres incommensurables.

IL faut les réduire à même dénomination & à moindres termes, & s'ils sont commensurables entre eux, on les ajoûte comme les nombres litteraux exprimez par la même lettre; s'ils sont incommensurables on les ajoûte par le signe $+$.

Il faut ajoûter $\sqrt{50}$ & $\sqrt{18}$. je les reduis à moindres termes, $5\sqrt{2}$ & $3\sqrt{2}$, il est évident que la somme est $8\sqrt{2}$. Car soit $\sqrt{2} = a$ donc $5\sqrt{2} = \sqrt{50} = 5a$, & $3\sqrt{2} = \sqrt{18} = 3a$, donc $8a = 8\sqrt{2}$.

Il faut ajoûter $\sqrt[3]{16}$ & $\sqrt[3]{54}$. je les reduis à moindres termes, $2\sqrt[3]{2}$ & $3\sqrt[3]{2}$, il est évident que la somme est $5\sqrt[3]{2}$. Il faut ajoûter $\sqrt{7}$ & $\sqrt{10}$, j'écris $\sqrt{7} + \sqrt{10}$. parce que $\sqrt{7}$ & $\sqrt{10}$ sont incommensurables entre eux.

Il faut ajoûter $\sqrt[3]{7}$ & $\sqrt[2]{10}$. j'écris $\sqrt[3]{7} + \sqrt[2]{10}$.

$\sqrt[3]{54a^3} + \sqrt[3]{432a^3} = 9a\sqrt[3]{2}$.

Lorsque pour ajoûter a avec b, on écrit $a \pm b$, c'est que a & b sont re-

gardez comme incommensurables.

CHAPITRE VI.

De la Soustraction des incommensurables.

IL faut ôter $\sqrt{18}$ de $\sqrt{50}$. c'est à dire $3\sqrt{2}$ de $5\sqrt{2}$. j'écris pour reste $2\sqrt{2}$. de même $\sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{2}$.

Il faut ôter $\sqrt{7}$ de $\sqrt{10}$; j'écris $\sqrt{10 - 7}$. &c.

CHAPITRE VII.

De la Multiplication des incommensurables.

IL faut les réduire au moins à même dénomination, multiplier nombre par nombre, & mettre devant le produit le même signe radical.

$\sqrt{2}$ par $\sqrt{3}$ produit $\sqrt{6}$. & $\sqrt[3]{5}$ par $\sqrt[3]{7}$ produit $\sqrt[3]{35}$.

Il faut multiplier $\sqrt[3]{7}$ par $\sqrt[2]{10}$. je les réduis à même dénomination, c'est $\sqrt[6]{49}$ & $\sqrt[6]{1000}$. le produit cherché est $\sqrt[6]{49000}$.

Il faut multiplier $\sqrt{50}$ par $\sqrt{18}$. je les

réduis à moindres termes, c'est $5\sqrt{2}$ & $3\sqrt{2}$. Le produit est $15\sqrt{4} = 15$ fois $2 = 30$. ou bien je multiplie $\sqrt{50}$ par $\sqrt{18}$, le produit est $\sqrt{900} = 30$. Tout incommensurable du second degré multiplié par luy-même produit le même nombre delivré du signe radical. $\sqrt{5}$ par $\sqrt{5}$ produit 5.

$\sqrt{50}$ par $\sqrt{63} = 5\sqrt{2}$ par $3\sqrt{7}$. le produit est $15\sqrt{14}$.

J'ay déja démontré cy-dessus la raison de cette operation.

Chapitre VIII.

De la Division des incommensurables.

Il faut les réduire au moins à même dénomination, diviser nombre par nombre, & mettre devant le quotient le signe radical.

$\sqrt{6}$ divisé par $\sqrt{2}$ donne pour quotient $\sqrt{3}$. $\sqrt[3]{35}$ divisé par $\sqrt[3]{7}$ donne pour quotient $\sqrt[3]{5}$.

Il faut diviser $\sqrt[3]{70}$ par $\sqrt[2]{10}$. je les réduis à même dénomination, c'est $\sqrt[6]{4900}$ & $\sqrt[6]{1000}$. le quotient est $\sqrt[6]{4\frac{9}{10}}$.

Il faut diviser $\sqrt{50}$ par $\sqrt{18}$. je les réduis à moindres termes; c'est $5\sqrt{2}$ par

$3\sqrt{2}$, le quotient est $\frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}$. Car soit $\sqrt{2} = a$, il est évident que $\frac{5a}{3a} = \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}$, ou $\sqrt{\frac{50}{18}} = \sqrt{\frac{25}{9}} = \frac{5}{3}$. Ou plus élegamment, je multiplie $\sqrt{50}$ par $\sqrt{18}$, le produit est $\sqrt{900} = 30$. J'écris $\frac{30}{18} = \frac{5}{3}$ quotient cherché.

Il faut diviser $\sqrt[3]{54}$ par $\sqrt[3]{16}$. je multiplie le quarré de $\sqrt[3]{16}$ qui est $\sqrt[3]{256}$ par $\sqrt[3]{54}$, le produit est $\sqrt[3]{13824} = 24$. J'écris $\frac{24}{16} = \frac{3}{2}$ quotient cherché, ce qui est évident par le chap. 4. cy-dessus.

CHAPITRE IX.

De l'Extraction des racines des incommensurables.

IL faut multiplier l'exposant du nombre par l'exposant de l'extraction, & mettre le produit pour exposant du même nombre, ce sera la racine cherchée. Il faut tirer la racine cubique ou troisiéme de $\sqrt{7}$ ou de $\sqrt[2]{7}$. J'écris $\sqrt[6]{7}$. c'est la racine cherchée.

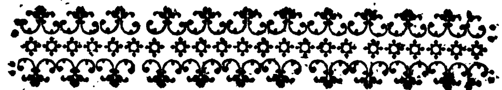
Il faut tirer la racine cinquiéme de $\sqrt[3]{13}$. je multiplie l'exposant 3 par l'exposant 5, & j'écris $\sqrt[15]{13}$. & c'est la

racine cinquiéme de $V^{3}13$. Ce qui eſt évident par le Chapitre ſecond cy-deſſus.

Il faut tirer la racine cinquiéme de $V^{3}32$. parce que 32 eſt une cinquiéme puiſſance de 2. j'écris pour racine cherchée $V^{3}2$; & ainſi des autres.



LIVRE



LIVRE VI.

Des Polynomes.

CHAPITRE I.

De l'Addition, la Soustraction & la Multiplication des Polynomes.

L'Addition & la Soustraction imparfaites des nombres incommensurables simples & incomplexes produisent les Polynomes, de même que l'addition & la soustraction imparfaites des nombres litteraux produisent les nombres complexes. Ainsi $\sqrt{5}$ ajoûté à $\sqrt{7}$, ou ôté de $\sqrt{7}$ forme le binome $\sqrt{7} + \sqrt{5}$ ou $\sqrt{7} - \sqrt{5}$. de même que a ajoûté à b, &c. L'addition ou la soustraction imparfaites & simples produisent les *binomes*, c'est à dire des nombres composez de deux termes.

L'addition & la soustraction imparfaites & reïterées produisent les *trinomes*, les *quadrinomes*, &c. Et en géneral les

polynomes; c'est à dire des nombres composez de trois, de quatre, &c. & en général de plusieurs termes.

L'addition, la soustraction & la multiplication des polynomes, n'a aucune difficulté differente de l'addition, la soustraction & la multiplication des nombres simples incommensurables que j'ay expliquées dans le Livre precedent, & de l'addition, la soustraction & la multiplication des nombres complexes que j'ay expliquées dans le second Livre. Ainsi je me contenteray d'en donner des exemples.

Exemples d'Addition.

$$1^{\circ}.\quad \begin{array}{r} 15\sqrt{2} + 3\sqrt{7} \\ 8\sqrt{2} + 10\sqrt{7} \\ \hline \end{array}$$

somme $23\sqrt{2} + 13\sqrt{7}$.

$$2^{\circ}.\quad \begin{array}{r} 15\sqrt{2} - 3\sqrt{7} \\ 8\sqrt{2} - 10\sqrt{7} \\ \hline \end{array}$$

somme $23\sqrt{2} - 13\sqrt{7}$.

$$3^{\circ}.\quad \begin{array}{r} 15\sqrt{2} + 3\sqrt{7} \\ 8\sqrt{2} - 10\sqrt{7} \\ \hline \end{array}$$

somme $23\sqrt{2} - 7\sqrt{7}$.

$$4^{\circ}.\quad \begin{array}{l} 15\sqrt{2} - 3\sqrt{7} \\ 8\sqrt{2} + 10\sqrt{7} \end{array}$$

somme $23\sqrt{2} + 7\sqrt{7}$.

$$5^{\circ}.\quad \begin{array}{l} 15\sqrt{2} - 3\sqrt{7} + 5\sqrt{11} \\ 8\sqrt{2} + 10\sqrt{7} \end{array}$$

somme $23\sqrt{2} + 7\sqrt{7} + 5\sqrt{11}$.

Exemples de Soustraction.

de $15\sqrt{2} + 10\sqrt{7}$
ôtez $8\sqrt{2} + 3\sqrt{7}$

reste $7\sqrt{2} + 7\sqrt{7}$

de $15\sqrt{2} + 3\sqrt{7}$
ôtez $8\sqrt{2} - 10\sqrt{7}$

reste $7\sqrt{2} + 13\sqrt{7}$.

de $15\sqrt{2} + 3\sqrt{7}$
ôtez $8\sqrt{2} + 10\sqrt{7}$

reste $7\sqrt{2} - 7\sqrt{7}$.

de $15\sqrt{2} - 3\sqrt{7}$
ôtez $8\sqrt{2} - 10\sqrt{7}$

reste $7\sqrt{2} + 7\sqrt{7}$.

Cette expression n'est pas toûjours la plus simple ni la plus elegante. Car $\frac{12}{\sqrt{7}-\sqrt{3}} = 3\sqrt{7}+3\sqrt{3}$, & cette derniere expression du quotient est beaucoup plus simple. On peut par son moyen trouver beaucoup plus facilement la valeur approchée en nombres entiers, comme j'espere le faire voir dans un Traité de l'examen des methodes, qui aura pour titre LE CALCUL DU CALCUL. La division des polynomes numeriques differe en cela essentiellement de la division des nombres complexes litteraux ; car $\frac{10}{a-b}$ ne peut pas se réduire à une expression plus simple. Je traitteray de cette espece particuliere de division dans le chap. suivant.

3°. Pour diviser un polynome par un polynome, on peut se servir de la methode ordinaire dans la division des nombres complexes par d'autres nombres complexes.

Exemple.

Il faut diviser $-\sqrt{77}-\sqrt{65}+\sqrt{55}+\sqrt{91}$ par $-\sqrt{11}+\sqrt{13}$.

Je dis en $-\sqrt{77}$ combien de fois $-\sqrt{11}$? il y est $+\sqrt{7}$. J'écris $\sqrt{7}$ au quotient, & je multiplie tout mon diviseur

$-\sqrt{11}+\sqrt{13}$ par $\sqrt{7}$, le produit est $-\sqrt{77}+\sqrt{91}$, que j'ôte de mon dividende, & il reste $-\sqrt{65}+\sqrt{55}$.

Je dis ensuite en $-\sqrt{65}$ combien de fois $\sqrt{11}$? & parce qu'il n'y est pas compris precisément, je tente la division de $+\sqrt{55}$ par $-\sqrt{11}$ ou de $-\sqrt{65}$ par $+\sqrt{13}$, & je trouve pour quotient $-\sqrt{5}$; & il ne reste rien, de sorte que le quotient cherché est $\sqrt{7}-\sqrt{5}$.

Il faut diviser $290-106\sqrt{6}$ par $7\sqrt{3}-5\sqrt{2}$.

Je dis en $-106\sqrt{6}$ combien de fois $+7\sqrt{3}$? il y est $-15\frac{1}{7}\sqrt{2}$; ou bien en $+290$ combien de fois $-5\sqrt{2}=-\sqrt{50}$? c'est à dire en $\sqrt{84100}=290$ combien de fois $-\sqrt{50}$? il y est $-\sqrt{1682}=-29\sqrt{2}$, aucun de ces quotients n'est le veritable, & il faut prendre seulement $-8\sqrt{2}$; & multipliant $7\sqrt{3}-5\sqrt{2}$, par $-8\sqrt{2}$, le produit est $-56\sqrt{6}+80$, que j'ôte de $290-106\sqrt{6}$, il reste $210-50\sqrt{6}$. Je dis ensuite en $-50\sqrt{6}$, combien de fois $-5\sqrt{2}$? il y est $+10\sqrt{3}$. & ôtant le produit il ne reste rien, de sorte que le quotient cherché est $+10\sqrt{3}-5\sqrt{2}$.

Cette espece de division reüssit rarement, si ce n'est dans des cas faits à plaisir, & il faudroit plusieurs Regles parti-

culieres pour la rendre praticable dans chaque espece de dividende & de diviseur.

On peut preparer le dividende & le diviseur en ôtant les fractions. Pour cela il faut trouver le plus petit dénominateur commun par la Regle que j'ay donnée au Livre troisiéme pour réduire plusieurs fractions à moindres termes de même dénomination ; & multiplier ensuite le dividende & le diviseur par ce dénominateur commun. Car par là on fera évanoüir toutes les fractions, & le dividende & le diviseur resteront dans le même rapport. Cecy doit s'appliquer aussi à la division des nombres complexes. Diviser 30 par 6, c'est la même chose que de diviser 60 par 12, ou 90 par 18, &c. Diviser a par b c'est la même chose que de diviser ac par bc.

Lorsque tous les termes du diviseur incommensurable & du quotient sont premiers entre eux, c'est à dire qu'ils n'ont aucune commune mesure, la division générale donne facilement le quotient ; comme dans le premier exemple où le dividende étant $-\sqrt{77} - \sqrt{65} + \sqrt{55} + \sqrt{91}$. & le diviseur $\sqrt{13} - \sqrt{11}$. Le quotient est $\sqrt{7} - \sqrt{5}$; parce qu'en ce cas là chaque produit partial

ſait un terme à part dans le dividende ; mais lorſque ces termes du diviſeur & du quotient ſont composez entre eux comme dans le ſecond exemple, cette diviſion générale eſt beaucoup plus difficile, parceque alors divers produits partiaux ne font qu'un terme dans le dividende ; comme dans le ſecond exemple où le diviſeur eſt $7\sqrt{3} + 5\sqrt{2}$, & le quotient eſt $10\sqrt{3} - 8\sqrt{2}$. Car $10\sqrt{3}$ eſt commenſurable ou composé à $7\sqrt{3}$. & leur commune meſure eſt $\sqrt{3}$; & de même $-5\sqrt{2}$ eſt commenſurable ou composé à $-8\sqrt{2}$. Plus il y a de ces termes composez, & en général plus il y a de produits moyens qui ſe confondent dans le dividende, plus la diviſion eſt difficile par exemple s'il falloit diviſer $1 + \sqrt[3]{90} - \sqrt[3]{300}$ par $\sqrt[3]{18} - \sqrt[3]{25}$, le quotient ſeroit $\sqrt[3]{12} + \sqrt{5}$. mais parce que le produit de $\sqrt[3]{12}$ par $\sqrt[3]{18}$ eſt $+ 6$, & le produit de $+ \sqrt[3]{5}$ par $- \sqrt[3]{25}$ eſt $- 5$. La ſomme de ces deux produits dans le dividende eſt $+ 1$.

On voit par là combien il eſt difficile de reüſſir dans cette diviſion, je donneray tout ce qu'on peut ſouhaiter la deſſus dans un recueil de nouvelles découvertes.

Chapitre III.

Methode nouvelle pour la division des Polynomes.

Il faut diviser 10 par $\sqrt{3} + \sqrt{2}$. je multiplie le dividende & le diviseur par le binome opposé $\sqrt{3} - \sqrt{2}$. les produits sont $10\sqrt{3} - 10\sqrt{2}$ pour nouveau dividende, & 1. pour nouveau diviseur. Car $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ par $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ produit $3 + \sqrt{6} - \sqrt{6} - 2 = 1$. par consequent le quotient est $10\sqrt{3} - 10\sqrt{2}$. Il faut diviser 12 par $\sqrt{7} - \sqrt{3}$, je multiplie l'un & l'autre par $\sqrt{7} + \sqrt{3}$. les produits sont $12\sqrt{7} + 12\sqrt{3}$, nouveau dividende, & 4 nouveau diviseur. Car $\sqrt{7} + \sqrt{3}$ par $\sqrt{7} - \sqrt{3}$ produit $7 + \sqrt{21} - \sqrt{21} - 3 = 4$. & par consequent le quotient est $3\sqrt{7} + 3\sqrt{3}$.

La difficulté de la division vient de ce que le diviseur est un nombre complexe; & l'esprit de la methode va à le rendre incomplexe par le moyen de la multiplication; parce qu'en multipliant également le dividende & le diviseur on conserve le même rapport; & par consequent on trouve le même quotient. Or

Il est évident que lorsque le diviseur est $\sqrt{a} + \sqrt{b}$, si on le multiplie par $\sqrt{a} - \sqrt{b}$, le produit sera $a - b$ nombre rationnel & diviseur incomplexe, ou d'un seul terme; & en ce sens 257 par exemple est un diviseur incomplexe. Il est vray que le dividende devient complexe s'il étoit incomplexe, & il devient ordinairement plus complexe qu'il n'étoit; mais on conte pour rien avec raison la multiplicité des termes du dividende, lorsque le diviseur est incomplexe.

On a trouvé de même des multiplicateurs pour toutes les autres especes de binomes à l'infini, dont voicy les formules.

Diviseurs.	*Multiplicateurs.*	*Produits ou nouveaux diviseurs.*
$\sqrt{a} + \sqrt{b}$.	$\sqrt{a} - \sqrt{b}$.	$a - b$.
$\sqrt{a} - \sqrt{b}$.	$\sqrt{a} + \sqrt{b}$.	$a - b$.
$\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$.	$\sqrt[3]{aa} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{bb}$.	$a + b$.
$\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}$.	$\sqrt[3]{aa} + \sqrt[3]{ab} - \sqrt[3]{bb}$.	$a - b$.
$\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b}$	$\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b}$.	$\sqrt{a} - \sqrt{b}$.
ou	$\sqrt[4]{a^3} - \sqrt[4]{aab} + \sqrt[4]{abb} - \sqrt[4]{b^3}$.	$a - b$.

$\sqrt[4]{} - \sqrt[4]{b}$	$\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b}$	$\sqrt{a} - \sqrt{b}$.
ou	$\sqrt[4]{a^3} + \sqrt[4]{aab}$	$a - b$
	$- \sqrt[4]{abb} + \sqrt[4]{b^3}$	
$\sqrt[5]{a} + \sqrt[5]{b}$	$\sqrt[5]{a^4} - \sqrt[5]{a^3 b^2} + \sqrt[5]{a^2 b^2}$	
	$- \sqrt[5]{ab^3} + \sqrt[5]{b^4}$	
$\sqrt[5]{a} - \sqrt[5]{b}$	$\sqrt[5]{a^4} + \sqrt[5]{a^3 b}$, &c.	
$\sqrt[6]{a} + \sqrt[6]{b}$	$\sqrt[6]{a} - \sqrt[6]{b}$ ou $\sqrt[6]{aa} - \sqrt[6]{}$	
	$ab + \sqrt[6]{bb}$. ou $\sqrt[6]{a^5} - \sqrt[6]{}$	
	$a^5 b$, &c.	
$\sqrt[6]{a} - \sqrt[6]{b}$	$\sqrt[6]{a} + \sqrt[6]{b}$; ou $\sqrt[6]{aa} +$	
	$\sqrt[6]{aab} - \sqrt[6]{bb}$, &c.	
&c.	&c.	&c.

Remarque.

On peut par là diviser tout nombre donné par tout binome donné ; on a remarqué aussi qu'on pouvoit réduire par la multiplication tout trinome quarré à un binome, & ce binome par consequent à un diviseur incomplexe ; mais personne que je sache n'avoit remarqué que l'on peut diviser aussi par tout quadrinome quarré, & par tout trinome cubique.

Tout trinome quarré comme $\sqrt{a} \pm \sqrt{b} \pm \sqrt{c}$, étant multiplié par le trinome opposé $\sqrt{a} \pm \sqrt{b} \mp \sqrt{c}$ produit le binome $a + b - c \pm 2\sqrt{ab}$. Car $a + b - c = d$. & ce binome étant multi-

plié par ſon binome oppoſé $d \mp 2\sqrt{ab}$ produit un diviſeur incomplexe $dd - 4ab = e$. Tout quadrinome quarré comme $\sqrt{a} \pm \sqrt{b} \pm \sqrt{c} \pm \sqrt{d}$, étant multiplié par le quadrinome oppoſe $\sqrt{a} \pm \sqrt{b} \mp \sqrt{c} \mp \sqrt{d}$ produit le trinome $a + b - c - d \pm 2\sqrt{ab} \pm 2\sqrt{cd}$. Car $a + b - c - d = e$; & ce trinome ſe réduira en binome, & le binome enfin en nombre incomplexe; mais en général tout quinquinome, ſextinome, &c. quarrez eſt irreductible, parce que les produits ſont compoſez d'autant ou de plus de termes que le diviſeur donné. Ainſi la methode eſt inutile.

Tout trinome cubique peut être réduit en binome cubique, & ce binome en nombre incomplexe.

Tout quadrinome, quinquinome & cubiques eſt irreductible en général.

Tout trinome, quadrinome, &c. des degrez ſuperieurs eſt auſſi irreductible en général par la même raiſon.

Lorſque je dis que ces polynomes ſont irreductibles en général, je veux dire qu'à moins de ſuppoſer certains rapports particuliers entre les termes qui les compoſent, on ne peut pas y appliquer la methode.

CHAPITRE IV.

De l'Extraction des racines des Polynomes.

COmme il y a deux methodes pour la division des polynomes, il y en a deux aussi pour l'extraction de leurs racines, l'une générale & semblable à l'extraction des nombres complexes litteraux; l'autre particuliere & specifique.

Exemple de la premiere Methode.

Pour tirer la racine quarrée de $\sqrt{^3 9} + 2\sqrt{^3 6} + \sqrt{^3 4}$. Je me sert de la formule $aa + 2ab + bb$, & supposant $aa = \sqrt{^3 9}$, & $2ab = 2\sqrt{^3 6}$, je trouve $a = \sqrt{^3 3}$ & $b = \sqrt{^3 2}$, & $bb = \sqrt{^3 4}$. d'où je conclus que la racine cherchée est $\sqrt{^3 3} + \sqrt{^3 2}$.

Il en est de même de toutes les autres puissances parfaites où les produits moyens ne se confondent point. Si l'on ne peut pas tirer exactement cette racine, cette extraction imparfaite produit une nouvelle espece de polynome qu'on appelle lié ou universel. Par exemple

s'il falloit tirer la racine quarrée de $\sqrt[3]{9} + 2\sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{5}$, il faudroit écrire $\sqrt{:\sqrt[3]{9} + 2\sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{5}}$.

Exemple de la seconde Methode.

Lorsque les produits moyens se confondent, la methode precedente ne peut pas être appliquée, & il faut quelque adresse pour demêler ces produits. Il faut tirer la racine quarrée du binome $12 + \sqrt{140}$. Je suppose cette racine $= \sqrt{a} + \sqrt{b}$. dont le quarré est $a + b + 2\sqrt{ab}$. Comme $a + b$ est rationnel, je l'égale à 12. & j'égale la partie irrationnelle $2\sqrt{ab}$ à la partie irrationnelle $\sqrt{140}$. de sorte que cette extraction de même que la division dans les deux Chapitres precedents sont plûtôt des problemes d'équations à resoudre, que de simples operations de calcul.

J'ay donc $a + b = 12$ & $2\sqrt{ab} = \sqrt{140}$ ou $4ab = 140$. La Regle générale pour resoudre ces sortes d'équations dépend de la résolution des équations du second degré, que je donneray dans la troisiéme Partie; mais on peut en trouver la resolution de cette maniere.

Puisque $a + b = 12$. je puis supposer $a = \frac{12}{2} + c = 6 + c$ & $b =$

$6 - c$, donc $4ab = 144 - 4cc = 140$. & ajoûtant $4cc$ de part & d'autre, on aura $144 - 4cc + 4cc = 144 = 140 + 4cc$, & ôtant 140 de part & d'autre il restera $4cc = 4$ & $c = 1$. donc $a = 7$ & $b = 5$, & par consequent la racine cherchée est $\sqrt{7} + \sqrt{5}$. d'où je tire cette Regle générale pour l'extraction de la racine quarrée des binomes.

Regle.

Tirez la racine quarrée de la difference des quarrez des deux parties du binome proposé.

Ajoûtez & ôtez cette racine à la plus grande partie.

Les racines quarrées de la moitié de la somme, & du restes étant jointes par le même signe que le binome, donneront sa racine.

Exemple.

Pour tirer la racine quarrée de $7 + \sqrt{24}$. je quarre 7 & $\sqrt{24}$, c'est 49 & 24. La difference est 25. dont la racine est 5. que j'ajoûte & que j'ôte de 7. c'est 12 & 2. les racines de leurs moitiez sont $\sqrt{6} + \sqrt{1}$ ou $\sqrt{6} + 1$, & c'est la racine cherchée.

On trouvera de même que la racine quarrée de $7 - \sqrt{24}$ est $\sqrt{6} - 1$: que la racine

racine quarrée de $\sqrt{27} + \sqrt{24}$ est $\sqrt{\sqrt{3}}$ $+ \sqrt{\sqrt{12}}$ ou $\sqrt[4]{3} + \sqrt[4]{12}$: &c. Mais si on cherche la racine quarrée de $\overline{10 + 2\sqrt{7}}$, on trouvera $\sqrt{:\overline{5 + \sqrt{18}}}$ $+ \sqrt{:5 - \sqrt{18}}$. qui est une racine plus composée que la proposée ; c'est pourquoy en ce cas là on écrit simplement $\sqrt{:\overline{10 + \sqrt{7}}}$.

J'ay trouvé plusieurs Regles abbregées pour l'extraction des racines des polynomes & pour trouver tout d'un coup, si cette extraction est possible ou non. J'ay aussi construit des Tables pour cela qu'on peut aisément continuer à l'infini ; mais ce que je viens d'expliquer suffit pour des Elemens. Je donneray le reste dans le receuil des nouvelles découvertes. Il suffit de remarquer en général, que par rapport à l'extraction des racines, il y a cinq choses à observer dans chaque polynome. 1°. L'exposant de l'extraction. 2°. L'exposant des parties du polynome. 3°. Le nombre des parties du polynome. 4°. La combinaison des signes + & —. 5°. La grandeur absoluë de chaque partie.

CHAPITRE V.

Reflexions generales sur le calcul Arithmetique & litteral.

TOutes les operations qu'on peut faire sur les nombres se réduisent à deux; *augmenter* & *diminuer*; on les augmente par trois operations, l'addition, la multiplication, & la formation des puissances; on les diminue par trois operations opposées, la soustraction, la division, & l'extraction des racines.

La premiere & la plus simple de toutes les operations est l'addition simple des nombres entiers & connus, exprimez par des chifres; cette addition est simple, lors qu'on n'a que deux nombres à ajoûter; elle est reïterée lors qu'il y a plus de deux & moins d'onze nombres à ajoûter; dans l'addition simple on suppose qu'on sache ajoûter par cœur tout nombre plus petit que dix à tout nombre plus petit que dix, & qu'on sache en exprimer la somme. Dans l'addition reïterée, on suppose qu'on sache ajoûter par cœur tout nombre plus petit que dix à tout nombre plus petit que 90. & qu'on

sache en exprimer la somme. S'il y a plus de dix nombres à ajoûter, on fait plusieurs additions reïterées, dont chacune ne contient que dix nombres ou moins, & la somme des sommes partielles donne la somme totale cherchée; ou bien l'on ajoûte la premiere somme partielle, comme un nombre simple aux nombres de la seconde somme; & ainsi de suite, la derniere somme donne la somme totale.

Pour ne rien supposer on peut donner des Tables où ces operations primitives se trouvent toutes faites. Celles pour l'addition reïterée que j'ay omises à cause de leur peu d'utilité peuvent être construites facilement sur le modele de celles que j'ay données pour la division pages 71, 72 & 73.

Dans l'addition, comme dans toutes les autres operations, on fait par parties ce qu'on ne peut pas faire tout d'un coup & d'une seule vûe.

L'Addition ne nous fait pas toûjours découvrir de nouvelles veritez; elle ne sert quelquefois qu'à exprimer d'une maniere plus commode, la somme des nombres donnez; quand j'ajoûte sept à dix, & que je dis que la somme est dix-sept, non seulement je n'apprens rien de nou-

veau, mais je n'ay même aucun avantage du côté de l'expression verbale : lorsque j'ajoûte 17 à 23, & que je dis que la somme est 40, j'ay quelque avantage du côté de l'expression, soit verbale soit litterale; car cette expression 40 est plus simple & plus commode que celle-cy 17 + 23. mais il semble que je ne découvre qu'une verité de fait, ou qui suppose un fait, c'est à dire qui suppose l'expression par la progression decuple, laquelle, quoique fondée sur la nature & en raison, est pourtant à la rigueur une chose arbitraire; si au lieu de la progression de dix en dix, on suppose qu'on se serve de la progression de 23 en 23, il n'y aura dans l'addition de 23 à 17 aucun avantage du côté de l'expression, & ce sera une proposition identique, comme celle-cy; dix & sept font dix-sept, & ainsi de tous les autres.

L'Addition de l'unité à tout nombre donné, ne nous fait connoître qu'une verité de fait, c'est à dire que les hommes ont donné arbitrairement un tel nom, ou une telle expression en chifres à un tel nombre, *un* & *un* font *deux* : *un* & *deux* font *trois* : *un* & *vingt-cinq* font *vingt-six*, &c.

L'Addition de tout nombre plus petit

que l'exposant de la progression à tout nombre complet de la même progression, ne nous fait pas même connoître *regulierement* une verité de fait, mais c'est une proposition purement identique, *dix* & *sept* sont *dix-sept*: *vingt* & *un* sont *vingt-un*: *trente* & *six* sont *trente-six*, &c. Cependant l'expression en chifres est plus simple, & par consequent avantageuse dans ces deux cas. Car 2 est une expression plus simple que celle-cy 1 + 1, & 17 est une expression plus simple que celle-cy 10 + 7 ou 10, 7.

Dans tous les autres cas l'addition propre nous fait découvrir un rapport réel entre la somme des nombres donnez & le nombre 10, ou en général entre les nombres donnez & l'exposant de la progression. Ce rapport est quelquefois un rapport d'équimultiplicité, comme 17 + 23 = 4 fois 10. & quelquesfois c'est un rapport composé d'équimultiplicité & d'excez, comme 18 + 25 = 4 fois 10, + 3 = 43. dans l'addition primitive des autres nombres plus petits que dix, dont la somme est plus petite que dix, le terme constant du rapport est l'unité: 2 & 3 font 5. c'est à dire 2 + 3 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1. ou si l'on veut 2

+ 3 = 4 + 1 : 3 + 5 = 7 + 1 = 6 + 2 = 4 + 4 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1, &c.

Or comme dans toutes les additions propres le terme constant du rapport est toûjours le même nombre, 10. il s'ensuit qu'on découvre par l'addition le rapport des diverses sommes entre elles ; puisque connoissant le rapport de deux ou de plusieurs quantitez à une même, on connoît aussi le rapport de ces quantitez entre elles.

Aprés avoir expliqué la nature de l'addition des nombres entiers exprimez par des chifres, je viens à l'addition des nombres entiers exprimez par des lettres. Lorsque j'appelle *a* nombre donné, & *x* nombre inconnu, lorsque dis-je je les appelle des nombres entiers, je les appelle ainsi simplement par rapport à l'expression. Car *a* & *x* peuvent réellement representer des fractions ou même des nombres irrationnaux ; mais pendant qu'ils restent sous cette expression, comme elle ressemble parfaitement à celle des nombres entiers connus, je dois les regarder comme des nombres entiers.

Cette addition litterale se soudivise comme l'addition numerique, ou *chifre-*

le, (s'il m'est permis de me servir de ce terme) en addition simple & reïterée; mais elle se soudivise encore particulierement en addition propre ou parfaite, & en addition impropre ou imparfaite. $17a + 23a = 40a$. C'est une addition propre & parfaite, parce qu'on connoît le rapport de la somme $40a$, à chacune des parties $17a$ & $23a$; mais $17a + 23b$ est une addition impropre & imparfaite, parce qu'on ne connoît pas le rapport de la somme aux parties. C'est à cette addition impropre que commence l'Algebre. On devoit ce semble être rebuté d'une addition qui paroît impossible, comme celle des nombres qui sont incommensurables, & à ne considerer que l'expression, a & b sont effectivement incommensurables, cependant il étoit absolument necessaire d'inventer une maniere de faire cette addition, pour pouvoir operer indistinctement sur les nombres connus, donnez & inconnus; afin de resoudre les questions proposées. Cette addition impropre forme une nouvelle espece de nombres que j'appelle, *nombres complexes*.

Tout ce que je viens de dire de l'addition simple & reïterée, parfaite & imparfaite, en chifres & en lettres doit

s'appliquer à proportion à la soustraction. Elle ne roule ordinairement que sur deux nombres, ainsi elle est ordinairement simple. On peut pourtant former des cas pour la soustraction reïterée ; comme si l'on propose d'ôter 13 de 100, & du reste ôter encore 17. ce qui se peut faire en deux manieres, ou par deux ou plusieurs soustractions simples, ou bien par une addition simple ou reïterée, & par une seule soustraction. $100 - 13 = 87$ & $87 - 17 = 70$ ou $13 + 17 = 30$. & $100 - 30 = 70$. Cette derniere maniere est plus simple. La soustraction reïterée arrive tres souvent en lettres.

La soustraction numerique est plus difficile que l'addition à cause des emprunts, & à cause qu'en apprenant à conter sur ses doigts, & en contant actuellement tout nombre donné de choses, on ne fait jamais qu'ajoûter l'unité continuellement; il faut au contraire conter à rebours, & contre l'ordre naturel, ou du moins contre la coûtume & l'habitude en retranchant continuellement l'unité pour faire les soustractions primitives. Tous ceux qui commencent content bien plus facilement 8 & 7 = 15, en contant sur leurs doigts 8 & 1 font 9, & 1 font 10, & 1 font 11, &c. qu'ils ne content en

retrogradant

retrogradant 15 — 1 = 14, 14 — 1 = 13, &c. jusques à 9 — 1 = 8 ou 15 — 7 = 8. d'ailleurs on a dans la pratique cent additions à faire pour une soustraction.

A mesure qu'une operation est plus difficile, il est plus aisé de s'y tromper; c'est pourquoy l'on peut se servir de l'addition pour s'assurer si l'on a bien fait la soustraction. Je veux savoir si 100 — 13 = 87. j'ajoûte 13 & 87, & trouvant que la somme est 100, je conclus que la soustraction est bien faite, c'est ce qu'on appelle faire la preuve d'une operation. L'Addition étant la plus simple de toutes, il est contre l'ordre & contre la raison d'en faire la preuve par une operation plus difficile, comme par la soustraction opposée. Car si l'on est assez malhabile pour se tromper dans l'addition, à plus forte raison se trompera-t-on dans la soustraction. La meilleure Regle en général pour ne se point tromper, est d'operer lentement & attentivement, ou de refaire quelque tems aprés la même operation.

Entre toutes les parties des Mathematiques, il n'y a que l'Arithmetique pratique où l'on se soit avisé de chercher des preuves pour les operations. Les

Geometres ; par exemple enſeignent la maniere de conſtruire un quarré égal à un triangle donné, ou à une figure rectiligne donnée ; ils ne donnent point de Regle pour s'aſſurer ſi l'operation eſt bien faite ; il ſuffit que la Regle ſoit démontrée ; d'où vient que les Arithmeticiens ſont plus difficiles ? c'eſt que dans les operations Geometriques on ne fait rien par cœur, on eſt ſoûtenu par la vüe & l'imagination dans le mouvement reglé & continu des Inſtruments dont on ſe ſert ; au lieu que dans les operations arithmetiques, toutes les operations primitives ſe font par cœur ; ainſi il eſt plus aiſé de ſe tromper, d'ailleurs il importe bien moins de ſe tromper dans celles-là que dans celles-cy, ſoit par rapport aux choſes ſenſibles, ſoit par rapport à la connoiſſance de la verité. Enfin l'on ne peut s'aſſurer que mécaniquement d'une operation Geometrique ſoit qu'on recommence l'operation, ou qu'on ſe ſerve de differentes methodes ; au lieu que l'on s'aſſure en quelque maniere demonſtrativement d'une operation arithmetique par l'operation oppoſée.

L'Addition n'eſt proprement qu'une numeration abbregée ; car la numeration eſt une addition reïterée & continuelle

de l'unité; & on pourroit faire par la simple numeration toutes les additions, mais cela seroit d'une longueur prodigieuse & impraticable. On pourroit de même faire la soustraction par une simple numeration renversée. La soustraction litterale, imparfaite, simple & reïterée forme aussi des nombres complexes.

Aprés l'addition & la soustraction des nombres entiers, l'operation la plus simple est celle de la multiplication; dans la multiplication numerique il est évident qu'on ajoûte le nombre à multiplier à luy même autant de fois, moins une que le multiplicateur a d'unitez; pour multiplier 8 par 5, il faut ajoûter 8, 4 fois à luy même; & on trouve 40 qui contient 8, autant de fois que 5 contient l'unité: il faut écrire 8, 5 fois; & faire 4 additions reïterées & continuelles, c'est ainsi qu'il faut entendre la Définition que j'ay donnée pag. 48. De même donc que l'addition est une numeration abbregée, la multiplication est une addition abbregée, & par consequent elle est aussi une numeration abbregée. Dans la numeration on ajoûte continuellement l'unité à elle même, dans la multiplication on ajoûte continuellement un nombre donné à luy-même. Dans l'addition

simple & reïterée on fait abstraction de l'égalité ou de l'inégalité des nombres à ajoûter; dans la multiplication les nombres à ajoûter sont tous égaux; & c'est ce rapport d'égalité comme plus simple, qui rend l'operation susceptible d'abbreviation.

La multiplication seroit impraticable par sa longueur si l'on se servoit de l'addition, & à plus forte raison si l'on se servoit de la numeration.

Comme l'on ne multiplie point proprement par 0, ni par 1, il n'y a que 36 multiplications primitives à savoir par cœur.

J'ay supposé que le produit de 5 par 3 étoit égal au produit de 3 par 5; on peut le démontrer sensiblement & exactement par l'exemple d'un rectangle de points.

A . . . . . B.
. . . . .
c . . . . . d.

A B C D. Car 5 rangées de 3 points chacune, ou 3 rangées de 5 points chacune font le même rectangle.

Si l'on multiplie trois nombres *a b c*, 2, 3, 5, continuellement en quelque ordre que ce soit, les produits seront égaux, les produits sont *a b c*, *b a c*, *b c a*, *c b a*, *a c b*, *c a b*.

1°. $ab = ba$ donc $abc = bac$, &

$bca = cba$, & $acb = cab$. Il suffit donc de démontrer que $abc = acb = bca$. Je forme une rangée de points égale à ab, & j'y ajoûte autant de rangées égales & paralleles que c a d'unitez. Je formeray le rectangle abc, dans la premiere figure qui represente le produit abc.

Premiere figure.

```
ab . . . . . .
ab . . . . . .
ab . . . . . .
ab . . . . . .
ab . . . . . .
      abc
```

Seconde figure.

```
        b
d . . | . . | . . e
  . . | . . | . .
  . . | . . | . . acb
  . . | . . | . .
  . . | . . | . .
 ac,   ac,   ac,
```

Troisiéme figure.

```
        a
d . . . | . . . E
  . . . | . . .
  . . . | . . . bca
  . . . | . . .
  . . . | . . .
 bc       bc
```

Dans la seconde figure je partage la premiere rangée d,e, composée d'un nombre de points égal à ab, en autant de parties égales que b contient d'unitez, chaque partie contiendra autant de points que a, contient d'unitez. On pourra donc diviser le grand rectangle en autant de petits rectangles, chacun égaux à ac, que b contient d'unitez. Ainsi la seconde figure represente le produit acb.

On prouvera par

un raisonnement semblable que la troisiéme figure represente le produit *b c a*, donc ces trois produits sont égaux.

Si l'on multiplie quatre nombres *a*, *b*, *c*, *d*, continuellement en quelque ordre que ce soit, les produits seront égaux. Pour le prouver je forme une rangée de points égale à *a b c*; & j'y ajoûte autant de rangées égales & paralleles, que *d* contient d'unitez. Je formeray par là un rectangle qui representera le produit *a b c d*, &c. & ainsi de suite.

Cette Demonstration me paroît nouvelle, plus simple que l'ordinaire, independante des proportions; & par consequent necessaire pour démontrer la multiplication où l'on ne peut sans renverser l'ordre supposer le Traité des raisons & des proportions.

La multiplication par 1, répond à l'addition de zero : la multiplication par 2 répond à l'addition simple : la multiplication par 3, 4 &c. répond à l'addition reïterée. La multiplication numerique est toujours parfaite, parce qu'on connoît le rapport du produit au multipliant & au multiplié : la multiplication d'un nombre par une lettre est imparfaite par rapport au nombre multipliant; & parfaite par rapport à la lettre multipliée : quand

je multiplie 5*a* par 3, le produit 15*a* a un rapport connu à 5*a*, & un rapport inconnu à 3 : la multiplication d'*a* par *a* est imparfaite entant que numerique, quoique l'addition d'*a* + *a* qui luy répond soit parfaite, elle est parfaite entant que litterale : enfin la multiplication d'*a* par *b*, qui répond à l'addition d'*a* + *b*, est imparfaite même entant que litterale. Toute multiplication parfaite découvre des nouveaux rapports & au terme constant 10, & des produits entre eux, & des produits aux multipliants & aux multipliez.

La preuve de 9 est utile dans la multiplication, parce que l'operation de la preuve est beaucoup plus simple que la multiplication même. Pour savoir si le produit de 57 par 86 est 4902, j'ajoûte les chifres du multipliant 5 & 7, c'est 12. dont (par regle générale) j'ôte 9, il reste 3 que je garde à part, comme preuve du multipliant. Je dis ensuite 8 + 6 = 14, & la preuve de 14 est 5; & c'est la preuve du multiplié 86, je multiplie la preuve 3 par la preuve 5, le produit est 15, dont la preuve est 6, parce que 15 — 9 = 6, ou parce que 1 + 5 = 6. Il faut que la preuve du produit 4902 soit aussi 6, si l'operation est bien faite. Or

pour avoir la preuve de 4902, je neglige le 9 & le 0, & ajoûtant les autres chifres 4 & 2 : comme leur ſomme eſt 6, je conclus que l'operation eſt bonne. La preuve de tout nombre plus petit que 9 eſt ce même nombre. La preuve de 7 eſt 7 : la preuve de 5 eſt 5 : &c. La preuve de 9 eſt 0. La preuve de 0 eſt 0. Lorſque la preuve d'un des deux nombres, ou du multipliant ou du multiplié eſt 0, il eſt inutile de chercher la preuve de l'autre ; & il faut que la preuve du produit ſoit 0, la multiplication ne peut pas être bonne & la preuve fauſſe ; mais la preuve peut ſe trouver bonne, & l'operation être fauſſe abſolument parlant. Car ſi j'avois pris ou 5901 ou 4092, &c. ou généralement tout autre nombre que 4902. dont la preuve fût 6, pour le produit de 57 par 86. La preuve ſeroit bonne & l'operation fauſſe, mais il eſt impoſſible moralement que cela arrive, parce qu'il faudroit deux ou pluſieurs erreurs qui ſe compenſaſſent exactement dans la ſomme des chifres.

La Demonſtration de cette Regle eſt fondée ſur ce principe. *Que la ſomme des chifres qui expriment un nombre multiple de 9 eſt ou égale à 9 ou multiple de 9.* Voyez cy-devant pag. 218

& 219. ſoit donc le multipliant $9a + b$, & le multiplié $9c + d$. La preuve du premier eſt b, & celle du ſecond eſt d; & il eſt évident que la preuve du produit $81ac + 9ad + 9bc + cd$, en retranchant tous les multiples de 9 eſt cd; c'eſt à dire que la preuve du produit eſt égale au produit des preuves du multipliant & du multiplié, ce qu'il falloit démontrer. Il eſt contre l'ordre de ſe ſervir de la diviſion oppoſée pour preuve de la multiplication.

Dans la multiplication litterale & dans la multiplication en général, où le multipliant n'eſt pas un nombre entier, le produit eſt *un nombre qui a même rapport au multiplié que le multipliant à l'unité.*

Le multiplié & le produit ſont homogenes, c'eſt à dire de même nature, lors que le multipliant eſt un nombre abſtrait; lorſque ces deux nombres repreſentent des lignes, ou l'un une ligne & l'autre une ſurface, le produit & le multiplié ſont heterogenes, car dans le premier cas le produit eſt une ſurface; & dans le ſecond cas c'eſt un corps, la multiplication pure & ſimple eſt impoſſible dans tout autre cas. On ne peut point multiplier ſurface par ſurface, ni livres, ſols

& deniers, par livres, sols & deniers, ou tems par vîtesse ou par espace, &c. Tous ces produits pris dans un sens direct & absolu sont chimériques, & lorsque dans la Regle de trois on fait ces sortes de multiplications, l'on ne multiplie réellement que des nombres abstraits. On peut dire aussi que dans la multiplication réelle des lignes par des lignes, ou des surfaces par des surfaces, l'unité répond au point & le represente; & que les lignes & les surfaces sont representées par des nombres infinis, qui ont entre eux le même rapport, que ce qu'ils representent. Toutes sortes de rapports peuvent en ce sens être representez par des nombres entiers infinis; & le produit contiendra toûjours autant de fois le multiplié que le multipliant contient cette unité infiniment petite.

Il est aisé d'appliquer à la division tout ce que je vens de dire de la multiplication.

La division commence d'être sujette au tâtonnement, lorsque le diviseur est complexe.

On peut en faire la preuve par la multiplication opposée, & par 9. ce n'est point une proprieté du nombre 9. Mais si au lieu du terme constant 10. de l'ex-

preſſion des nombres, on prenoit par exemple 100. la preuve ſe feroit de même par 3, par 9, par 11, par 33, par 99. & généralement par tout nombre qui meſure le terme conſtant diminué de l'unité.

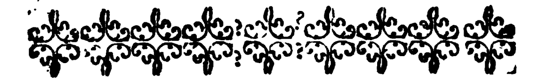
Pour ſavoir ſi 84 diviſé par 12. donne 7 pour quotient, il n'y a qu'à multiplier 7 par 12. & voir ſi le produit eſt égal à 84. ou bien multiplier la preuve du quotient par la preuve du diviſeur, & au produit ajoûter la preuve du reſte, s'il y en a. Car la preuve du produit ou de la ſomme doit être égale à la preuve du dividende. Pour ſavoir ſi 109242 diviſé par 7803 donne pour quotient 14. Je multiplie la preuve de 14 qui eſt 5, par la preuve de 7803, qui eſt 0. Le produit eſt 0, & comme la preuve de 109242 eſt auſſi 0, je ſuis *moralement* aſſuré que la diviſion eſt bonne.

En diviſant 217 par 14, le quotient eſt 15, & il reſte 7. la preuve de 14 eſt 5, la preuve de 15 eſt 6. Je multiplie 5 par 6. la preuve du produit 30 eſt 3 que j'ajoûte à la preuve 7, du reſte 7. La ſomme eſt 10, dont la preuve eſt 1. & parce que la preuve du dividende 217 eſt auſſi 1. Je ſuis mora-

lement aſſuré que l'operation eſt bonne.

Il me reſteroit encore pluſieurs reflexions à faire ſur le calcul Arithmetique & litteral; mais ce que j'en ay dit peut ſuffire.





SECONDE PARTIE.

De la Formation & de la Preparation des Equations.

CHAPITRE I.

Des differentes especes de Problemes.

TOutes les questions qu'on peut former sur les nombres se reduisent à trouver un ou plusieurs nombres inconnus, par le moyen des rapports connus que ces nombres ont entre eux, ou avec d'autres nombres donnez ou connus.

La comparaison de ces rapports se fait par le moyen des *équations*, c'est à dire en trouvant une ou plusieurs fois deux sommes égales, dont l'une enferme le nombre, ou les nombres donnez, connus & inconnus sous une certaine expression; & l'autre somme contient les mêmes nombres, ou une partie sous une expression égale ou differente.

Il y a des Problemes incomplexes &

des Problemes complexes. J'appelle Problemes incomplexes ceux où il n'y a qu'un nombre inconnu à trouver; & j'appelle Problemes complexes ceux où il y a plusieurs nombres inconnus à trouver.

Entre les Problemes incomplexes de même qu'entre les complexes, il y a divers degrez de simplicité à l'infini, selon le degré où les inconnuës sont élevées: par exemple un Probleme qui se reduit à cette équation $7x + 3 = 24$ est un Probleme incomplexe du premier degré, parce que x est au premier degré; mais $7xx = 28$, est une équation d'un probleme incomplexe du second degré, à cause que l'inconnuë x est élevée au second degré.

Dans chaque degré excepté dans le premier il y a des problemes simples, & des problemes composez. Ceux où l'inconnuë est une seule fois d'un côté de l'équation; & la quantité connuë de l'autre côté sont des problemes simples, & ceux où l'inconnuë est plusieurs fois en differens degrez sont des problemes composez; ainsi $7x^3 = 56$ est un probleme incomplexe simple du troisiéme degré: mais $7x^3 + 3xx - 5x = 58$ est un probleme incomplexe & composé du troisiéme degré.

Il y a auſſi des problemes détermi-nez, indéterminez, & plus que determi-nez.

Les problemes determinez ſont ceux où il n'y a qu'une ſeule reſolution, ou un certain nombre determiné de reſolutions.

Les indéterminez ſont ceux qui ont une infinité de reſolutions.

Les plus que déterminez conviennent avec les determinez, en ce qu'ils n'ont qu'une ou un certain nombre de reſolu-tions, mais ils different en ce qu'on con-noît plus de rapports qu'il n'eſt neceſſai-re pour déterminer la quantité ou les quantitez inconnuës.

On connoît les problemes déterminez en ce qu'ils donnent autant des rapports connus, & par conſequent autant d'é-quations differentes preciſément qu'il y a de nombres inconnus.

Les problemes indéterminez en don-nent moins, & les plus que déterminez en donnent plus. Ainſi s'il faut trouver trois quantitez inconnuës, & qu'on con-noiſſe trois rapports, le probleme ſera déterminé. Si l'on n'en connoît que deux ou un, le probleme ſera indéterminé, ſi on en connoît quatre ou cinq, &c. le pro-bleme ſera plus que determiné.

Il y a des problemes indéterminez où

l'on exige des resolutions rationelles, c'est à dire des resolutions en nombres, & où l'on rejette les resolutions irrationelles ; c'est à dire qui renferment des incommensurables, qui se presentent naturellement ; comme par exemple si l'on propose de diviser un nombre quarré en deux autres nombres quarrez, l'adresse de l'analise consiste à éviter cette irrationalité.

Presque toutes les questions de Diophane roulent sur cette espece de probleme, & c'est une partie particuliere de l'Algebre, celle même qu'on estime le plus quoi qu'elle soit la moins utile, n'étant presque propre que pour resoudre des questions faites à plaisir sur les nombres. On peut pourtant la regarder comme une occupation, qui donne quelque subtilité à l'esprit, qui le rend inventif, ou du moins comme un amusement fort innocent & pareil à celuy des échets.

Les Anciens n'ont point connu les nombres irrationaux, & ne les ont jamais regardez comme des nombres. C'est ce qui leur a fait rejetter toutes les resolutions irrationelles. Il y a des problemes possibles & impossibles. Les impossibles sont resolus quand on a démontré leur impossibilité, & il y en a de trois

degrez.

degrez. Les uns ſont purement & ſimplement impoſſibles; & on le connoît en ce qu'ils ſe reduiſent à une équation abſurde, comme $3 = 4$. d'où l'on ne peut tirer aucune conſequence, ſi ce n'eſt que le probleme eſt impoſſible. Les autres donnent des reſolutions negatives, comme ſi un probleme ſe reduit neceſſairement à cette équation $x = -3$. Pour lors le probleme eſt effectivement impoſſible dans le ſens où il eſt propoſé, mais cette équation nous marque qu'il y a un autre probleme tout ſemblable, où l'on peut appliquer cette reſolution en changeant ſeulement quelque ſigne de + en — ou de — en +. Enfin les autres ſe reduiſent à des expreſſions imaginaires, comme $x = \sqrt{-3}$ qui eſt une racine qui n'eſt ni poſitive ni negative. Cette expreſſion marque auſſi l'impoſſibilité du probleme dans le ſens propoſé, mais avec quelque uſage pour des problemes ſemblables où les ſignes ſont changez. On connoît outre cela dans toutes ces trois eſpeces d'impoſſibilité, ce qui rend le probleme impoſſible & par quelle addition, quel retranchement ou changement des conditions on peut le rendre poſſible.

Il y a des Problemes, numeriques, geo-

metriques, physiques, astronomiques, &c. selon les differens sujets où l'on peut appliquer l'Algebre; & pour lors il faut les dépoüiller de tout ce qu'ils ont de particulier à leur sujet, pour les considerer sous l'idée abstraite de nombres.

Il y a des problemes sinthetiques, analitiques & mixtes. *Voyez la Preface.* Enfin il y en a de theorematiques, ou de verifications de Theoremes, dans lesquels il faut que les deux nombres de l'égalité se trouvent precisément les mêmes si le Theoreme est veritable. On verra dans la suite des exemples de toutes ces differentes especes de Problemes.

CHAPITRE II.

Regle générale pour la Formation des équations.

EXprimez tous les nombres connus, chacun par une des onze premieres lettres de l'Alphabet *a*, *b*, *c*, *d*, &c. & les inconnuës par une des onze dernieres, *n*, *o*, &c. *x*, *y*, *z*, &c. Et operant ensuite sur ces nombres connus & inconnus, en les ajoûtant ensemble, les ôtant, les multipliant, &c. selon les conditions

du probleme, & ſuivant les Regles de la premiere Partie, comparez enſemble toutes les ſommes qui doivent être égales; & vous aurez par là formé ce qu'on appelle équation.

Nous commencerons par les problemes ſimples & incomplexes du premier degré.

Premier Exemple.

Trouver un nombre qui étant ajoûté à 37 faſſe 71, &c. J'appelle ce nombre inconnu n, & je ſuppoſe $37 = a$ & $71 = b$. J'ay par les conditions du probleme $n + a = b$, & l'équation eſt formée.

Second Exemple.

Trouver un nombre lequel étant multiplié par 7, & le produit augmenté de 5 face 26.

Je ſuppoſe $7 = a$ & $5 = b$ & $26 = c$, & j'appelle n le nombre cherché. Ce nombre étant multiplié par a donne an, auquel j'ajoûte le nombre b. La ſomme eſt $an + b$, laquelle ſuivant les conditions du probleme doit être égale au nombre c, j'ay donc l'égalité formée an

$+ b = c$, cette égalité eſt fort aiſée à reſoudre, mais il ne s'agit par encor icy de la reſolution.

J'aurois pû former plus facilement une égalité particuliere, ſans avoir recours aux lettres *a*, *b*, *c*, en écrivant ſimplement $7n + 5 = 26$, mais l'expreſſion $an + b = c$ eſt infiniment plus générale : car *a*, *b*, *c*, repreſentent tous les nombres poſſibles. La premiere expreſſion eſt de l'ancienne Algebre qu'on appelle encore *Algebre numerique*, & la ſeconde eſt de *l'Algebre ſpecieuſe*, inventée par Monſieur Viete.

Chapitre III.

De la preparation des Equations par transſpoſition, ou par Addition & Souſtraction.

Ou

De l'évanoüiſſement des termes Homogenes.

Preparer une Equation, c'eſt luy donner la forme la plus commode pour être reſoluë.

Il y a de deux ſortes de preparation,

l'une absolument necessaire, sans laquelle on ne peut pas resoudre; l'autre simplement commode avec laquelle on resout plus facilement. Il n'y a que trois preparations necessaires, qui sont l'évanoüissement des termes homogenes, l'évanoüissement des inconnuës, & celuy des incommensurables complexes.

Il y a trois preparations simplement commodes, l'évanoüissement des fractions, l'évanoüissement de l'absolu de la haute puissance; & l'évanoüissement des incommensurables incomplexes. On pourroit y ajoûter pour quatriéme espece de preparation commode, l'évanoüissement des termes moyens, si l'on avoit pour cela une methode générale.

De l'évanoüissement des termes Homogenes.

J'Appelle *termes Homogenes* ceux qui sont exprimez par des nombres connus, ou par les mêmes lettres élevées au même degré. Ainsi 7 est homogene à 18; $7a$ est homogene à $18a$: $7a^3b^2$ est homogene à $18a^3b^2$.

Lorsque dans une équation il y a des termes homogenes dans les deux nombres, on les fait évanoüir d'un côté; ou

de tous les deux, en ajoûtant ou en ôtant également de part & d'autre.

Exemple.

Il faut trouver un nombre qui étant multiplié par 7, & le produit augmenté de 8 fasse autant que ce même nombre multiplié par 10, le produit étant diminué de 19.

Soit ce nombre inconnu x, je le multiplie par 7, le produit est $7x$, à quoy j'ajoûte 8, la somme est $7x + 8$, que je garde à part comme premier membre de mon équation. Je multiplie ensuite ce même nombre par 10, & du produit $10x$, j'ôte 19, le reste est $10x - 19$, qui est le second membre de mon équation. J'ay donc $7x + 8 = 10x - 19$. Cette équation renferme quatre termes, deux dans chaque membre; les termes homogenes sont $7x$ & $10x$. de même que $+ 8$ & $- 19$.

On peut commencer par faire évanoüir celuy qu'on voudra des deux termes homogenes; mais la Regle générale est de faire évanoüir le terme negatif plûtôt que le positif; & le plus petit positif & le plus grand negatif, lors qu'ils ont tous deux le même signe.

On fait évanoüir les termes negatifs, en ajoûtant de part & d'autre leur valeur positive ; on fait au contraire évanoüir le plus petit des termes positifs, en l'ôtant de part & d'autre, que si les deux termes homogenes étoient égaux avec le même signe, il n'y auroit qu'à les effacer de part & d'autre.

Dans l'équation $7x + 8 = 10x - 19$. je commence par ajoûter $+ 19$ de part & d'autre. J'ay d'un côté $7x + 27$ & de l'autre seulement $10x$, parce que $10x - 19 + 19 = 10x$. Par là je réduis mes quatre termes à trois ; savoir $7x + 27 = 10x$.

Ensuite considerant les deux termes positifs & homogenes $7x$ & $10x$. Je fais évanoüir le plus petit $7x$, en ôtant $7x$ de part & d'autre, & il ne reste plus que deux termes ; savoir $27 = 3x$. l'équation est entierement preparée ; pour la resoudre il n'y a qu'à diviser le nombre 27 par l'absolu 3. le quotient 9 donne la valeur d'x nombre cherché.

Cette Regle est fondée sur ce principe, *que si à choses égales on ajoûte choses égales, les sommes seront égales ; & si de choses égales on soustrait choses égales, les restes seront égaux.*

Pour resoudre ce probleme universel-

lement : ſoit 7 $=a$ 8 $=b$. 10 $=c$. 19 $=d$. & le nombre inconnu $=x$. J'auray l'équation ſuivante $ax+b=cx-d$, ajoûtant $+d$ de part & d'autre, j'auray $ax \begin{smallmatrix}+b\\+d\end{smallmatrix} = cx \begin{smallmatrix}-d\\+d\end{smallmatrix} = cx$; & ôtant ax de part & d'autre, j'ay $\begin{smallmatrix}+b\\+d\end{smallmatrix} = \begin{smallmatrix}cx\\-ax\end{smallmatrix}$ & $x=\frac{b+d}{c-a}$.

On peut s'épargner la peine d'écrire deux fois le même terme qu'on veut faire évanoüir. Il ſuffit de l'effacer dans le membre de l'équation où l'on veut le faire évanoüir ; & l'ajoûter à l'autre membre avec un ſigne contraire. Ainſi dans l'exemple cy-deſſus $7x+8=10x-19$, au lieu d'ajoûter $+$ 19 de part & d'autre, je n'ay qu'à effacer $-$ 19 du ſecond membre ; &c. ajoûter $+$ 19 dans le premier, ce qui revient au même.

On peut par cette methode faire paſſer tel terme qu'on voudra, & ſi l'on veut tous les termes d'un membre de l'équation, on peut dis-je les faire tous paſſer dans l'autre membre. Ainſi au lieu de $xx-ax=b$, on peut écrire $xx=ax+b$ ou $xx-ax-b=0$.



CHAP.

CHAPITRE IV.

De la preparation par Multiplication & Division.

Ou

De l'évanoüissement des fractions, & de l'absolu de la haute Puissance.

SOit l'égalité proposée $7x + 5\frac{2}{15} = 4x + 7\frac{13}{20}$.

Je cherche par la methode du Livre 3. chap. 6. pag. 127. Le plus petit dénominateur commun aux fractions $\frac{2}{15}$, & $\frac{13}{20}$ c'est 60.

Je multiplie ensuite les deux membres de l'équation par 60. & j'ay $420x + 308 = 240x + 459$. & l'équation est délivrée de fractions. J'en fais évanoüir les termes homogenes, il reste $180x = 151$.

On fera de même évanoüir les fractions litterales.

Lorsque l'absolu de la haute puissance mesure les absolus des autres termes, il faut tout diviser par cet absolu. Ainsi l'équation $7x = 21$ étant divisée par 7, se réduit à celle-cy $x = 3$.

Cette preparation donne la resolution même cherchée dans les équations du premier degré.

L'équation $7x^3 - 42xx + 63x = 84$ étant divisée par 7, absolu de la haute puissance $7x^3$ se réduit à celle-cy. $x^3 - 6xx + 9x = 12$.

Mais si l'absolu de la haute puissance ne mesure pas les absolus des autres termes, il ne faut pas se servir de la division, parce qu'on auroit des fractions; & en voulant les faire évanoüir par la multiplication, on feroit un cercle inutile. Il faut en ce cas avoir recours à la methode du Chapitre suivant. Lors que l'inconnuë se trouve dans tous les termes de l'équation, on l'abbaisse en divisant par le dernier degré. Ainsi $x^5 - 8x^3 = 7xx$ se réduit à $x^3 - 8x = 7$ en divisant tout par xx.

CHAPITRE V.

De la preparation par substitution ou transformation des Equations.

LOrs qu'on change d'inconnuë, ce changement s'appelle *substitution*, & la nouvelle équation qui en resulte s'ap-

pelle une *équation transformée*, c'eſt le plus général & le plus ingenieux des moyens que l'Algebre fourniſſe pour la preparation & la reſolution des équations.

Soit l'équation propoſée $7x^3 + 8xx - 5x = 30$. Il faut faire évanoüir l'abſolu 7. de la haute puiſſance $7x^3$.

Je ſuppoſe $x = \frac{y}{7}$, & ſubſtituant cette valeur à la place d'x, & $\frac{yy}{49}$ à la place de xx, & $\frac{y^3}{343}$ à la place d'x^3. Je trouve l'équation transformée $\frac{7y^3}{343} + \frac{8yy}{49} - \frac{5y}{7} = 30$ ou $\frac{y^3}{49} + \frac{8yy}{49} - \frac{5y}{7} = 30$.

Je multiplie tout par 49. le produit eſt $y^3 + 8yy - 35y = 1470$, & c'eſt l'équation transformée & preparée.

Autre Exemple.

$$\begin{array}{lccccc} & 7x^4 + & 8x^3 - & 3xx + & 5x = & 13. \\ \text{multipl.} & 0. & 1. & 7. & 49. & 343. \end{array}$$

$y^4 + 8y^3 - 21yy + 245y = 7889$. équation preparée, en ſuppoſant $x = \frac{y}{7}$.

Autre Exemple.

$13x^5 + 0x^4 - 2x^3 + 0xx - 3x = 8.$
multipl. 0 1. 13. 169. 2197. 28561.

$y^5 - 26y^3 + 6581y = 228488.$
Equation transformée & preparée en ſuppoſant $x = \frac{y}{13}$. Or aprés que par la reſolution on aura connu la valeur d'y, on trouvera la valeur cherchée d'x, en diviſant ou par 7, ou par 13, &c. ſuivant la ſubſtitution.

Chapitre VI.

De l'évanoüiſſement des Inconnuës.

DAns toute équation preparée il n'y a qu'une ſeule inconnuë.

Lors qu'un Probleme ſe réduit à pluſieurs équations qui renferment pluſieurs inconnuës, on peut toûjours par la ſubſtitution en faire évanoüir autant qu'il y en a qui ſe trouvent en deux équations differentes.

Si le Probleme eſt determiné ou plus que determiné, tout ſe doit réduire à

une ſeule équation, & à une ſeule inconnuë.

Si le Probleme eſt indeterminé tout ſe doit reduire à une ſeule équation, où les inconnuës hors une ſont arbitraires. Ainſi il n'y a encore proprement qu'une inconnuë. Cecy ſe comprendra mieux par les exemples.

On propoſe de trouver deux nombres, dont la ſomme ſoit 30 & la difference 4. j'appelle l'un x & l'autre y. J'ay ces deux équations $x + y = 30$ & $x - y = 4$. ſuppoſé que je veuille faire évanoüir y. Je tranſpoſe tellement ces deux équations, que y ſe trouve ſeul d'un côté. Cette tranſpoſition ſe fait par addition & par ſouſtraction, comme dans le Chap. 3. cy-deſſus; & je dis puiſque $x - y = 4$. en faiſant évanoüir le terme negatif $- y$ j'aurai $x = 4 + y$, & ôtant 4 de part & d'autre j'aurai $x - 4 = y$ ou $y = x - 4$. Car il faut toûjours obſerver de mettre la premiere à gauche, l'inconnuë qu'on veut faire évanoüir. J'aurois peu faire évanoüir tout d'un coup x de l'égalité $x - y = 4$; & il me ſeroit reſté $- y = 4 - x$, mais cette équation n'eſt point naturelle, & autant qu'on le peut, il faut rendre poſitifs les membres de l'équation.

De ces deux équations $y = 30 - x$, & $y = x - 4$, je tire celle-cy $30 - x = x - 4$ ou y est évanoüi ce qu'il falloit faire. La raison de la formation de cette troisiéme équation est évidente. Car puisque dans les deux équations precedentes, les premiers membres y & y sont égaux entre eux étant les mêmes; il est évident que les seconds membres $30 - x$ & $x - 4$ sont aussi égaux, parce que les choses qui sont égales à une troisiéme sont égales entre elles.

Si l'on applique les Regles du Chapitre 3. & 4. sur cette derniere équation $30 - x = x - 4$, on trouvera que la valeur d'x est 17. & en substituant cette valeur d'x dans l'une des deux équations $y = 30 - x$ ou $y = x - 4$ indistinctement, on trouvera $y = 13$ & le probleme est resolu.

On abregera quelquefois la transposition en changeant tous les signes de l'équation, & ce changement a lieu lorsque un des membres de l'équation est entierement negatif, comme dans l'exemple cy-dessus $-y = +4 - x$. en changeant tous les signes on aura $+y = -4 + x$ ou $y = x - 4$. Car il est plus naturel de mettre la quantité negative aprés la quantité positive. La raison

de cette operation est que par le changement des signes, tout ce qui étoit positif devient negatif; & tout ce qui étoit negatif devient positif, & ainsi l'excez ou la difference est toûjours la même; & par consequent l'égalité subsiste comme auparavant, ainsi si $-13 = 4 - 17$, il est vrai de dire que $+13 = 17 - 4$.

Quelque nombre d'inconnuës qu'il y ait, si elles sont toutes seulement au premier degré sans être multipliées l'une par l'autre, & qu'il y ait autant d'équations que d'inconnuës, comme dans l'exemple cy-dessus, on pourra toûjours les réduire par cette methode à une seule inconnuë & une seule équation.

Mais lorsque ces inconnuës seront élevées au dessus du premier degré, ou multipliées l'une par l'autre, il faudra se servir de la methode suivante inventée par Monsieur de Fermat. Soient les deux égalitez proposées $xx + yy = 41$, & $xy = 20$ supposé qu'il faille faire évanoüir y, il faut ranger ces deux égalitez en sorte que les termes où y se trouve soient seuls d'un côté, comme $y^2 = 41 - xx$, & $xy = 20$. Je considere ces deux équations comme 4 termes d'une proportion égale. Je multi-

plie ensuite le premier terme yy par le quatriéme 20, & le second $41 - xx$ par le troisiéme xy; & j'égale ces deux produits par cette nouvelle équation $20yy = 41xy - x^3y$; & divisant tout par y j'ay cette quatriéme équation $20y = 41x - x^3$, ou y est au premier degré, & divisant tout par 20 j'ay sa valeur $y = \frac{41x - x^3}{20}$, & je puis substituer cette valeur dans l'une des deux équations primitives, ou par consequent je n'auray plus que x & ses puissances avec des nombres, & y sera entierement évanoüi ce qu'il falloit faire. Car au lieu de $xx + yy = 41$. J'auray cette équation $xx + \frac{1681xx - 82x^4 + x^6}{400} = 41$, & au lieu de $xy = 20$ j'auray $\frac{41xx - x^4}{20} = 20$.

L'esprit de cette methode consiste à disposer, en sorte les quatre termes de deux égalitez qu'on en face quatre termes d'une proportion geometrique, ou le premier terme & le troisiéme soient affectez de l'inconnuë qu'on veut faire évanoüir, & le second & le quatriéme terme n'en soient point affectez. Car en

multipliant ensuite les extrêmes & les moyens, cette inconnuë se trouvera necessairement dans tous les termes des deux produits; & elle ne si trouvera jamais plus élevée que dans l'une des deux équations proposées. Puis qu'on ne multiplie les termes affectez de cette inconnuë, que par des termes qui n'en sont pas affectez; & qui par consequent doivent être regardez comme de simples absolus.

Or dés qu'une lettre se trouve dans tous les termes d'une équation, il est évident qu'on peut abaisser cette lettre au moins d'un degré par le moyen de la division; & en reïterant cette operation & comparant toûjours les dernieres équations avec les plus simples en abaissant toûjours d'un degré, on arrivera enfin à une équation aussi simple que la plus simple des deux proposées; & en comparant encore ces deux plus simples, on arrivera enfin à une équation du premier degré qui donnera la valeur de l'inconnuë qu'on veut faire évanoüir; & qui s'évanoüira effectivement en substituant cette valeur trouvée, ou ses puissances dans tous les termes où cette inconnuë se trouve ou ses puissances.

Il n'est pas necessaire d'avoir recours

à la proprieté de la proportion geometrique, comme a fait Monsieur de Fermat, pour prouver que le produit des extremes est égale au produit des moyennes. Car indépendamment de cette proprieté, si une premiere quantité est égale à une seconde; & une troisiéme quantité égale à une quatriéme, il est évident que le produit de la premiere par la quatriéme est égal au produit de la seconde par la troisiéme. Car c'est une suite de ce principe que deux quantitez égales étant multipliées également leurs produits sont égaux.

CHAPITRE VII.

De l'évanoüissement des Incommensurables.

Il y a de deux sortes d'incommensurables, les uns sont incomplexes & les autres complexes. On n'a égard qu'à ceux qui renferment des inconnuës, les incomplexes sont ceux qui ne renferment sous le signe radical qu'un seul nombre incomplexe comme $\sqrt{5xx}$. $\sqrt[3]{7abx}$.

Les complexes sont ceux qui renferment sous le signe radical des quantitez

complexes. Par exemple $\sqrt{8x + 7}$ $\sqrt[3]{5xx + 3abx - 13}$.

Il n'eſt jamais abſolument neceſſaire de faire évanoüir les incommenſurables incomplexes, ſur tout lorſque l'irrationalité ne tombe que ſur les nombres connus, comme dans $\sqrt{5xx}$ qui ſe réduit à $x\sqrt{5}$. Il eſt même en ce cas non ſeulement inutile, mais tres déſavantageux de faire évanoüir ces incommenſurables, parce que on fait par là monter l'équation à des degrez fort élevez, & ſouvent impraticables; & il faut reſoudre l'équation telle qu'elle eſt. C'eſt ce que les Analiſtes n'avoient pas remarqué. Il faut ſeulement prendre garde que lorſque l'expoſant du ſigne radical ne meſure pas preciſement l'expoſant de l'inconnuë, il faut en ſubſtituer une autre qui ſoit meſuré par c'eſt expoſant, & qui ait le plus petit rapport poſſible à l'inconnuë donnée. Ainſi au lieu de $\sqrt[3]{7abx}$, il faut ſuppoſer $x = y^3$ & écrire $y\sqrt[3]{7ab}$. & ainſi des autres.

Il eſt abſolument neceſſaire de faire évanoüir les incommenſurables complexes, parce qu'on ne ſauroit ſans cela reſoudre l'égalité. Il y a deux methodes differentes, l'une par équimultiplication

où formation de puiſſance, laquelle eſt oppoſée à l'extraction des racines qui forment les incommenſurables, comme la multiplication ſimple l'eſt à la diviſion qui donne les fractions, & l'une rétablit ce que l'autre a défait.

L'autre methode qui eſt de l'invention de Monſieur de Fermat, ſuppoſe la ſubſtitution des inconnuës. Soit donc premierement l'équation propoſée.

$$\sqrt{85xx + 3x} = 8x + 30.$$

Pour faire évanoüir le terme irrationel je conſidere que lors que les racines ſont égales, les quarrez ſont auſſi neceſſairement égaux; & qu'ainſi ſi la racine quarrée de $\overline{85xx + 3x}$ eſt égale à $8x + 30$. Il eſt évident que le quarré luy-même; ſavoir $85xx + 3x$ ſera égal au quarré de l'autre membre de l'équation, ſavoir au quarré de $8x + 30$. ce qui me donne cette nouvelle équation delivrée d'incommenſurables. $85xx + 3x = 64xx + 480x + 900$.

De même ſoit l'équation propoſée $\sqrt[3]{8x^3 + 13} = 10x - 1$. en cubant chaque membre de l'équation, on trouvera l'équation rationelle & commenſurable.

$$8x^3 + 13 = 1000x^3 - 300xx + 30x - 1.$$

Mais lors qu'il y a plus d'un terme incommensurable, cette methode n'est pas praticable, parce que souvent il arrive qu'en élevant un membre de l'équation à la puissance marquée par le signe radical, on introduit des nouveaux incommensurables en aussi grand nombre, & quelquefois même en plus grand nombre. Par exemple si on avoit l'équation suivante $\sqrt[3]{2x^3} = \sqrt[3]{5xx} - 10$, en cubant chaque membre on aura cette nouvelle équation $2x^3 = 5xx - 30\sqrt[3]{5x^4} + 300\sqrt[3]{5xx} - 1000$. Laquelle est beaucoup plus composée que la proposée. Pour resoudre cette équation il faudroit supposer $x = y^3$, ce qui donneroit l'égalité transformée $\sqrt[3]{2y^9} = \sqrt[3]{5y^6} - 10$, ou $y^3\sqrt[3]{2} = yy\sqrt[3]{5} - 10$. & il faut la resoudre sous cette derniere forme.

Il est vrai qu'en continuant ces multiplications, & mettant d'un côté tous les termes rationels; & de l'autre les irrationels, on fait à la fin évanoüir tous les incommensurables, mais le calcul est horriblement long & ennuyeux; c'est pourquoy j'aimerois mieux me servir de la methode de Monsieur de Fermat, qui consiste à supposer une inconnuë à la place de chaque terme incommensurable, & à

faire ensuite évanoüir toutes ces inconnuës suivant la methode du Chapitre precedent par le moyen de l'égalité qui se trouve par hipotese entre la puissance de chacune de ces nouvelles inconnuës, & la puissance semblable du terme incommensurable ; par exemple si on a cette équation $\sqrt[3]{8x^3 + 13} = \sqrt[3]{5xx + 3} - 10$. On suppose $y = \sqrt[3]{8x^3 + 13}$ & $z = \sqrt[3]{5xx + 3}$ d'où je tire ces deux équations $y^3 = 8x^3 + 13$ & $z^3 = 5xx + 3$. & l'équation proposée se trouve transformée en celle-cy $y = z - 10$. & par le moyen de ces trois équations, j'en trouve une quatriéme toute rationelle, où il n'y a qu'une seule inconnuë x, qui étoit ce qu'il falloit faire.

CHAPITRE VIII.

De l'évanoüissement des termes moyens.

IL y a long-tems qu'on cherche une methode générale pour faire évanoüir tous les termes moyens, mais on n'a pu encore l'a trouver.

On fera évanoüir tous les seconds ter-

mes par la Regle ſuivante, qui eſt de Monſieur Deſcartes; égalez tout à 0. diviſez enſuite l'abſolu de ſecond terme par l'expoſant de la haute puiſſance, ajoûtez le quotient à une nouvelle inconnuë avec un ſigne contraire à celuy du ſecond terme donné, & ſuppoſez cette ſomme ou ce reſte égal à l'inconnuë de l'équation propoſée; en ſubſtituant cette valeur à la place de l'inconnuë, on aura une nouvelle équation transformée, où le ſecond terme ſera évanoüi.

Premier exemple, ſoit l'équation propoſée $xx + 8x - 65 = 0$. je ſuppoſe $x = y - 4$, & la ſubſtitution me donne $yy - 81 = 0$, ou $yy = 81$.

Second Exemple.

Soit l'équation $xx - 8x - 65 = 0$. je ſuppoſe $x = y + 4$, & la ſubſtitution me donne $yy - 81 = 0$ ou $yy = 81$.

Troiſiéme Exemple.

Soit l'équation $x^3 + 15xx - 13x - 2370 = 0$. Je diviſe l'abſolu du ſecond terme $15xx$, c'eſt à dire je diviſe 15 par l'expoſant de la haute puiſſance x^3, c'eſt à dire par 3. & j'ajoûte le quo-

tient 5 à y nouvelle inconnuë que je substitue en supposant $x = y - 5$. la substitution me donne $y^3 * - 163y - 1930 = 0$. si j'avois eu $x^3 - 15xx$ &c. j'aurois supposé x égal à $y + 5$.

Cette Regle suppose que l'équation ait receu la preparation du Chapitre 5. Car si la haute puissance étoit precedée d'un absolu, il faudroit diviser l'absolu du second terme par le produit de l'exposant de la haute puissance multiplié par son propre absolu. Par exemple si on avoit $8x^3 + 120xx$ &c. il faudroit diviser 120 par 3 fois 8 ou 24. le quotient seroit 5, & il faudroit supposer $x = y - 5$, &c.

On a trouvé cette Regle & sa Demonstration en examinant la formation des puissances. Car il a été aisé de remarquer que si on éleve un binome quelconque composé de x + ou — quelque nombre à quelque puissance que ce soit, l'absolu du second terme contient autant de fois le nombre qui fait la seconde partie du binome que l'exposant de la haute puissance de x a d'unitez.

La premiere puissance de $x \pm 7$ est $x \pm 7$.

La seconde puissance est $xx \pm 14x + 49$.

La

La troisiéme puissance est $x^3 \pm 21xx + 147x \pm 343$.

La quatriéme puissance est $x^4 \pm 28 x^3 + 294xx \pm 1372x + 2401$.

Il est aisé de remarquer que dans le second degré l'absolu $\pm$ 14 du second terme est double de 7: que dans le troisiéme degré $\pm$ 21 est triple du même 7: & ainsi de suite & toûjours avec le même signe dans la racine. Pour faire donc évanoüir ce second terme, il n'y a qu'à supposer une nouvelle inconnuë; & luy ajoûter avec un signe contraire, l'absolu de ce second terme divisé par l'exposant de la puissance; car en substituant ce binome à la place de l'inconnuë, le second terme se trouvera deux fois; mais avec des signes contraires, d'où s'ensuit son évanoüissement.

Remarque.

On peut encore faire évanoüir quel terme on voudra d'une équation qui ne passe pas le dixiéme degré, ce que aucun Auteur que je sache n'avoit encore donné.

Dans toute équation où il manque un terme, on peut faire évanoüir son terme reciproque (j'entens par terme recipro-

que ceux qui ſont également éloignez de deux extremitez de l'équation, par exemple dans une équation du cinquiéme degré x^4 & x^1 ſont des termes reciproques, parce qu'ils ſont tous deux également éloignez : le premier de x^5 & le ſecond de x^0 ou de l'abſolu, c'eſt à dire x au deſſous du premier degré, & de même x^3 & x^2 dans la même équation ſont encore des termes reciproques, parce que x^3 eſt éloigné de x^5 autant que x^2 eſt éloigné de x^0. On peut encore les definir des termes dont les expoſans joints enſemble ſont égaux à l'expoſant de la haute puiſſance; ce qui revient au même.

Pour faire évanoüir un de ces termes reciproques, il n'y a qu'à ſuppoſer l'inconnuë donnée égale à une fraction qui aye pour numerateur l'abſolu du terme qu'on veut faire évanoüir, & pour dénominateur une nouvelle inconnuë ; & ſubſtituer cette valeur. Par exemple, ſoit l'équation propoſée.

$z^5 = az^4 + q$.

Je pourrois par la methode precedente faire évanoüir z^4, mais la ſubſtitution me donneroit des z^3 des zz & des z ; & ainſi j'aurois une transformée beaucoup plus compoſée que la propoſée,

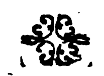
puis qu'elle auroit cinq termes au lieu de trois, mais en supposant $z = \frac{a}{y}$ j'auray par substitution $\frac{a^5}{y^5} = \frac{a^5}{y^4} + q$, & ôtant les fractions j'auray $qy^5 = a^5 - a^5y$, dans laquelle au lieu d'un terme moyen du quatriéme degré je n'en ay qu'un du premier, ce qui rend l'équation beaucoup plus facile à resoudre. Si on vouloit avoir un premier terme precedé seulement de l'unité, comme cela est toûjours plus commode, il auroit fallu supposer $z = \frac{q}{y}$, en choisissant toûjours pour numerateur l'absolu de l'équation proposée, & on auroit $\frac{q^5}{y^5} = \frac{aq^4}{y^4} + q$, & ôtant les fractions & divisant tout par q on auroit $y^5 = q^4 - aq^3y$. On transformera de même $z^5 = az^3 + q$, en $y^5 = q^4 - aq^2yy$. On peut aussi au lieu de q prendre telle quantité connuë qu'on jugera à propos & la plus commode. Enfin pour faire évanoüir quel terme on voudra d'une équation au dessous du dixiéme degré exclusivement & generalement quel terme on voudra des quatre premiers aprés la haute puissance, ou des quatre penul-

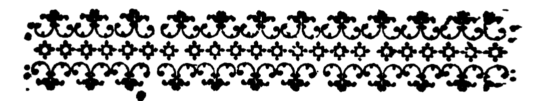
tiémes on se servira de la methode suivante qui est formée sur les deux precedentes. Si c'est l'un des quatre premiers termes qu'on veut faire évanoüir, on supposera l'inconnnë proposée $x = z + y$ où y represente l'absolu; & aprés la substitution on égalera le terme qu'on veut faire évanoüir à 0; & comme on fait resoudre universellement toutes les équations jusques au quatriéme degré inclusivement on trouvera la valeur de y pour faire évanoüir le second terme par une égalité du premier dégré: On fera évanoüir le troisiéme terme par une équation du second degré, & le quatriéme terme par une équation du troisiéme, &c.

Mais si c'est un des quatre derniers termes qu'on veuille faire évanoüir, on commencera par faire évanoüir son terme reciproque s'il ne l'est pas déja, & en supposant $x = \frac{q}{y}$ on fera évanoüir le terme proposé. Par exemple dans l'équation $z^3 = pzz + qz + r$. Supposé qu'on veuille faire évanoüir le terme qz, on le pourra faire en deux manieres. En supposant $z = x \pm y$ & substituant cette valeur dans l'équation on trouvera $x^3 \pm 3yxx + 3yyx \pm y^3$ égal à $pxx \pm 2pyx + qx + pyy \pm qy$

$+ r$, & afin de faire évanoüir x qui répond au terme z, il faut que $+ 3yyx$ ſoit égal à $qx \pm 2pyx$, & que par conſequent $3yy = q \pm 2py$. Cette équation étant reſoluë donnera deux valeurs de y qui ſatisferont, mais parce que ces valeurs ſont univerſellement, parlant irrationelles du ſecond degré, elles ne ſont pas commodes ; c'eſt pourquoy il vaudra mieux ſe ſervir de ma methode, qui donne toûjours une valeur rationelle. Je ſuppoſerois donc $z = x + \frac{p}{3}$, ce qui me donnera une équation transformée, ou le ſecond terme ſera évanoüi ; & en ſuppoſant enſuite $x = \frac{q}{y}$ j'auray une ſeconde transformée, ou le ſecond terme ſera rétabli, & le troiſiéme évanoüi, ce qu'il falloit faire.

Une équation parfaitement preparée eſt celle où il n'y a qu'une inconnuë, où il n'y a point de fractions ni d'incommenſurables, où l'abſolu de la haute puiſſance eſt l'unité, où il y a le moins de termes ; les plus petits termes & les moins élevez qu'il ſoit poſſible.





TROISIE'ME PARTIE.

De la Resolution des équations.

CHAPITRE I.

De la Resolution des Problemes du premier degré.

ARTICLE I. *Des Problemes déterminez du premier degré où il n'y a qu'une inconnuë.*

TOute équation simple & preparée du premier degré se reduit à cette formule $ax = b$ où x marque l'inconnuë, & a & b des quantitez connuës.

Pour resoudre cette équation il n'y a qu'à diviser b par a pour avoir la valeur cherchée d'x qui est b divisé par a. La Demonstration de cette Regle est fondée sur ce principe que si deux quantitez égales sont divisées par le même nombre, les exposants ou quotients seront é-

gaux, si $ax = b$ divisant l'un & l'autre membre de l'égalité par a, les quotients sont x & $\frac{b}{a}$, qui sont par consequent égaux.

Si on avoit par exemple $ax - bx = c$ on auroit pour quotient $x = \frac{c}{a - b}$, car en supposant $a - b = d$ on auroit $dx = c$ & $x = \frac{c}{d}$ ou $x = \frac{c}{a - b}$, ce qui revient au cas precedent. La Regle générale est donc qu'il faut diviser la quantité connuë par tout ce qui affecte la quantité inconnuë, soit que ce qui affecte soit une quantité incomplexe, comme dans le premier exemple $ax = b$ où l'on divise par a, ou bien que ce soit une quantité complexe, comme dans le second exemple $ax - bx = c$ où l'on divise par $a - b$, & l'on trouve $x = \frac{c}{a - b}$.

Premier Probleme.

Trois quantitez étant données en trouver une quatriéme, qui ait même rapport à la troisiéme des données que la seconde à la premiere.

J'appelle la premiere a, la seconde

b, la troisiéme c, la quatriéme x suivant le Probleme, il faut que $\frac{a}{b}$ soit égale à $\frac{c}{x}$, car pour trouver le rapport de deux quantitez, il faut diviser l'une par l'autre; & puisque selon le Probleme il faut que le rapport de c à x soit égal au rapport de b à a, il faut qu'en divisant a par b, & c par x les quotiens soient égaux. J'ay donc l'équation $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$, & multipliant tout par b pour ôter la premiere fraction j'ay l'équation preparée $a = \frac{bc}{x}$, & multipliant encore tout par x pour ôter la seconde fraction, j'ay l'équation entierement preparée $ax = bc$, & par consequent divisant selon la Regle tout par a, j'ay l'équation $x = \frac{bc}{a}$ & le Probleme est resolu.

Cette équation $x = \frac{bc}{a}$ marque que pour trouver le quatriéme nombre cherché, il faut multiplier le second par le troisiéme, & diviser le produit par le premier; c'est ainsi qu'on a pu trouver la Regle de trois & sa Demonstration.

L'équation $ax = bc$ démontre ce Theoreme.

Theoreme important, *que de quatre nombres proportionnaux le produit des extremes est égal au produit des moyennes.*

On pourra de même trouver & démontrer facilement tous les autres theoremes ou problemes sur la proportion geometrique. Par exemple soit la progression geometrique continue & diminuant à l'infini, 8, 4, 2, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, &c. On demande la somme de cette progression infinie. Le premier terme est 8, & il est seulement antecedent, le dernier terme est zero, & il est seulement consequent, tous les autres termes moyens, comme 4, 2, 1, $\frac{1}{2}$, &c. sont antecedens & consequens; soit donc la somme cherchée de tous les termes égale à x, la somme de tous les antecedens sera x — 0, ou x; mais la somme des consequens sera seulement $x + 0 - 8$, ou $x - 8$. Or comme un antecedent est à son consequent, ainsi *en composant* la somme de tous les antecedens est à la somme de tous les consequens; donc $8. 4 : x. x - 8$. donc $4x = 8x - 64$. donc $x = 16$. somme cherchée; & en général *comme l'excez du premier terme sur le second, est au premier, ainsi le premier est à la somme de tous les autres.* La somme de cette progression infinie, 27, 18,

12, 8, $5\frac{1}{3}$, &c. eſt égale à 81 ; car 27 — 18. 27 : 27. 81. ſi les deux premiers termes ſont a & b, la ſomme ſera $\frac{aa}{a-b}$.

SECOND PROBLEME.

Trois nombres étant donnez en trouver un quatriéme, dont l'excez ſur le troiſiéme ſoit égal à l'excez du ſecond ſur le premier.

SOient les trois nombres donnez a, b, c, & le quatriéme x, il faut que $x - c = b - a$, donc par tranſpoſition $x = b + c - a$, & le probleme eſt reſolu.

Cette équation marque que pour trouver le quatriéme nombre cherché, il faut ajoûter le ſecond au troiſiéme & de la ſomme ôter le premier terme.

L'équation $x - c = b - a$ ſe change par tranſpoſition en celle-cy $x + a = b + c$. d'où je conclus que lorſque quatre nombres ſont tels que le premier ſurpaſſe, ou eſt ſurpaſſé par le ſecond d'autant preciſément que le troiſiéme ſurpaſſe ou eſt ſurpaſſé par le quatriéme, la ſomme des deux extremes eſt égale à la ſomme des deux moyens. Ces nombres ſont en *proportion arithmeti-*

que. La raison geometrique est une maniere de contenir, ou d'être contenu; la raison arithmetique est une maniere de surpasser ou d'être surpassé: la proportion geometrique est une égalité de raison geometrique, ou une *équimultiplicité*: la proportion arithmetique est une égalité de raison arithmetique ou d'excez; cette proportion est continue ou discontinue, finie ou infinie dans l'une & d ns l'autre; lorsquil y a plus de trois termes en proportion continue, c'est une progression.

On pourra de même trouver & démontrer facilement tous les theoremes, & les problemes de la proportion arithmetique.

Car tous les raisonnemens qu'on fait sur la raison, la proportion & la progression geométrique, *alternando*, *componendo*, *invertendo*, &c. par la multiplication & la division peuvent être appliquez à la raison, à la proportion & à la progression arithmetique, par l'addition & la soustraction, & tout ce qu'on fait dans les rapports geometriques par formation de puissances & par extraction de racines, se fait dans les rapports arithmetiques par multiplication & par division.

TROISIE'ME PROBLEME.

Deux nombres étant donnez en trouver un troisiéme tel que la somme de chaque deux étant multipliée par le troisiéme, les trois produits soient en proportion arithmetique.

SOient les nombres donnez a & b, & le troisiéme x; il faut suivant le probleme ajoûter a avec b, & multiplier la somme $a + b$ par x, ce qui donne pour premier produit $ax + bx$, que je garde à part.

J'ajoûte ensuite a avec x, & je multiplie la somme $a + x$ par b, le second produit est $ab + bx$, que je garde aussi à part.

Enfin j'ajoûte b avec x, & je multiplie $b + x$ par a, ce qui donne le troisiéme produit $ab + ax$.

J'ay donc ces trois produits $ax + bx$, $ab + bx$, $ab + ax$, lesquels doivent être en proportion arithmetique; c'est à dire que le premier doit surpasser, ou être surpassé par le second, d'autant que le second surpasse, ou est surpassé par le troisiéme, ce qui donne l'équation $ax + bx - ab - bx = ab + bx - ab - ax$, & cette équa-

tion étant preparée se reduit à celle-cy.

$2ax - bx = ab$.

Et divisant tout par $2a - b$, j'ay pour quotients $x = \frac{ab}{2a - b}$, & le probleme est resolu.

Mais il ne l'est pas pleinement, parce que les trois produits $ax + bx$, $ab + bx$, $ab + ax$, peuvent encore être arrangez en deux manieres.

1°. $ax + bx - ab - ax = ab + ax - ab - bx$ qui se reduit à $2bx - ax = ab$ & $x = \frac{ab}{2b - a}$.

2°. $ab + bx - ax - bx = ax + bx - ab - ax$ qui se reduit à $x = \frac{2ab}{a + b}$, de sorte que j'ay trois valeurs d'x qui satisfont, & qui satisfont seules.

En Nombres.

Soient les nombres donnez 5 & 3. $5 = a$ & $3 = b$. Or $x = \frac{ab}{2a - b}$, donc $x = \frac{15}{10 - 3} = \frac{15}{7} = 2\frac{1}{7}$. $x = \frac{ab}{2b - a}$, donc $x = \frac{15}{6 - 5} = \frac{15}{1} = 15$. $x = \frac{2ab}{a + b} = \frac{30}{8} = \frac{15}{4} = 3\frac{3}{4}$.

Ces trois nombres $2\frac{1}{7}$, 15, $3\frac{3}{4}$ satis-

font. Car si je prens 15, ajoûtant 3 & 5, la somme est 8, que je multiplie par 15, le produit est 120. ajoûtant 3 &. 15. la somme est 18 que je multiplie par 5, le produit est 90. Enfin ajoûtant 5 & 15. la somme est 20, que je multiplie par 3, le produit est 60. les trois produits 120, 90, 60 sont en proportion arithmétique continuë. Si l'on prend $x = 2\frac{1}{7}$, les trois produits seront $\frac{180}{7}$, $\frac{150}{7}$, $\frac{120}{7}$. Si l'on prend $x = 3\frac{3}{4}$, les trois produits seront $\frac{135}{4}$, $\frac{120}{4}$, $\frac{105}{4}$, qui sont aussi en proportion arithmétique; mais si l'on veut avoir une resolution où les trois valeurs du nombre cherché soient en entiers, il n'y a qu'à prendre pour les nombres donnez 84 & 140. & les trois valeurs du troisiéme nombre seront 60, 105, 420.

PROBLEME IV.

Deux nombres étant donnez en trouver un quatriéme, qui soit en proportion harmonique avec les donnez.

LEs nombres 3, 4, & 6, sont en proportion harmonique, parce que comme le plus petit 3, est au plus grand 6, ainsi l'excez du moyen 4, sur le plus pe-

tit 3, est à l'excez du plus grand 6, sur le moyen 4. Car 3. 6 : 4 — 3. 6 — 4. ou 3. 6 : 1. 2.

Cette proportion est composée de la proportion geometrique (puis qu'on y considere l'équimultiplicité,) & de la proportion arithmetique, puis qu'on y considere l'égalité d'excez ; elle s'appelle proportion harmonique, parce que les plus petits nombres où elle se trouve étant 3, 4, & 6, les cordes de même matiere, de même grosseur, de même tension, & dont les longueurs sont comme ces nombres, forment les trois principaux accords. Le rapport de 3 à 6, ou de 1 à 2 forme l'octave ou le *diapason*: le rapport de 4 à 6, ou de 2 à 3 forme la quinte ou le *diapente*: le rapport de 3 à 4 forme le *diatessaron*.

Soient donc les deux nombres donnez a & b; le troisiéme nombre cherché est, ou le plus petit, ou le moyen, ou le plus grand ; ainsi il y a trois cas.

Supposons 1°. que ce soit le plus petit, & appellons-le x, le moyen a, & le plus grand b. donc $x.\ b : a - x.\ b - a$; & multipliant les extremes & les moyens, on aura l'équation $bx - ax = ab - bx$, ou $2bx - ax = ab$ & $x = \frac{ab}{2b - a}$

Soit $a = 4$ & $b = 6$, donc $x = \frac{24}{12 - 4} = \frac{24}{8} = 3$ nombre cherché.

2°. Soient les trois nombres a, x, b, donc $a, b : x - a . b - x$. Ce qui me donne l'équation $ab - ax = bx - ab$, ou $ax + bx = 2ab$ & $x = \frac{2ab}{a + b}$. Soit $a = 3 . b = 6$, donc $x = \frac{36}{9} = 4$.

3°. Soient les trois nombres a, b, x, on trouvera $x = \frac{ab}{2a - b}$ soit $a = 3$, $b = 4$, donc $x = \frac{12}{6 - 4} = \frac{12}{2} = 6$. Il faut dans ce troisiéme cas que $2a$ soit plus grand que b.

La progression geometrique peut augmenter & diminuer à l'infini.

1 . 2, 4, 8, 16, &c. en augmentant à l'infini.

1 . $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$ &c. & en diminuant à l'infini.

La progression arithmetique peut augmenter & non pas diminuer à l'infini.

5, 11, 17, 23, &c. peut augmenter à l'infini en ajoûtant continuellement 6 ; mais elle ne peut pas diminuer à l'infini. Car 23, 17, 11, 5, finit à 5, parce qu'on ne peut pas ôter 6 de 5.

La progression harmonique peut dimi-

nuer à l'infini & ne peut pas augmenter.

La proportion contre harmonique se trouve dans ces nombres 3, 5, 6, parce que 3 . 6 : 6 — 5 . 5 — 3 : ou 3 . 6 : 1 . 2. On pourra s'exercer à trouver le troisiéme terme contre harmonique, comme on vient de trouver le troisiéme terme harmonique ; mais il y a deux cas où le Probleme est du second degré.

Probleme V.

Un pere fait son Testament de cette maniere. Il laisse 1000 écus à l'aîné de ses enfans, & la onziéme partie de ce qui reste : il laisse au second 2000 écus & la onziéme partie de ce qui reste : il laisse au troisiéme 3000 écus & la onziéme partie de ce qui reste, & ainsi de suite jusques au dernier qui a le reste de ses freres. Il se trouve aprés le partage qu'ils ont tout également ; on demande quel étoit le bien du pere : combien il avoit d'enfans & la part de chacun.

Je suppose 1000 $= a$ & 11 $= b$, & le bien du pere $= x$.

La part de l'aîné est $a + \frac{x - a}{b}$, ou $\frac{ab + x - a}{b}$, & ôtant cette part du

bien total x, il reste $x - \frac{ab + x - a}{b}$ $= \frac{bx - ab - x + a}{b}$.

Sur ce reste le second fils prend $2a$, & il reste $\frac{bx - ab - x + a}{b} - 2a$, ou $\frac{bx - 3ab - x + a}{b}$, dont la onziéme partie est $\frac{bx - 3ab - x + a}{bb}$, de sorte que la part du second est $2a + \frac{bx - 3ab - x + a}{bb}$ ou $\frac{2abb + bx - 3ab - x + a}{bb}$; or suivant les conditions du Probleme la part de l'aîné est égale à la part du se-second; donc $\frac{2abb + bx - 3ab - x + a}{bb}$ $= \frac{ab + x - a}{b}$, & réduisant tout à même dénomination, j'ay $2abb + bx - 3ab - x + a = abb + bx - ab$; cette équation étant preparée se reduit à celle-cy $x = abb - 2ab + a$. Et le probleme est resolu, je substitue 1000, à la place d'a & 11, à la place de b, & 121 à la place de bb, je trouve x $=$ 100000. c'étoit le bien du pere dont ôtant 1000, il reste 99000. dont la onziéme partie est 9000. Ainsi la part de l'aîné est de 10000 écus; il

reste 90000 écus sur quoy le second prend 2000 écus, il reste 88000 dont la onziéme partie est 8000. Or 2000 + 8000 = 10000. donc le nombre des enfans étoit 10, & ils avoient chacun 10000 écus.

ARTICLE II.

Des Problemes déterminez du premier degré où il y a plusieurs inconnuës.

TRouver deux nombres dont la somme & la difference sont données.

Soit la somme a, la difference b, le plus grand nombre inconnu x, le plus petit y; donc $x + y = a$ & $x - y = b$. Par transposition $x = y + b$, & par substitution $y + b + y = a$ ou $2y + b = a$, par transposition $2y = a - b$, par division $y = \frac{a-b}{2}$, par substitution $x + \frac{a-b}{2} = a$ ou $2x + a - b = 2a$ & $x = \frac{a+b}{2}$ le probleme est resolu.

Soit $a = 8$ & $b = 2$ donc $x = \frac{8+2}{2} = \frac{10}{2} = 5$ & $y = \frac{8-2}{2} = \frac{6}{2} = 3$.

Operation.

Noms des nombres.	*Equations formées suivant les conditions du Probleme.*
ſomme . . . a	
difference . . b	
grande inconnuë x	Premiere $x + y = a$
petite inconnuë y	ſeconde $x - y = b$

Preparation de ces deux Equations.

Seconde $x = b + y$ par tranſpoſition.
Premiere $b + y + y = a$ & par addition.
$b + 2y = a$ & par tranſpoſition.
$2y = a - b$ & par diviſion.
$y = \frac{a - b}{2}$ reſolution d'y, & par ſubſtitution.

Seconde $x = b + \frac{a - b}{2}$, & par multiplication.
$2x = 2b + a - b$, & par ſouſtraction.
$2x = b + a$, & par arrangement.
$2x = a + b$, & par diviſion.
$x = \frac{a + b}{2}$ reſolution d'x.

SECOND PROBLEME.

Trouver trois nombres tels que le premier avec la moitié des deux autres fasse 25, le second avec le tiers des deux autres fasse 26, le troisiéme avec la moitié des deux autres fassent 29.

SOient les trois nombres cherchez x, y, z, donc $x + \frac{y+z}{2} = 25$, $y + \frac{x+z}{3} = 26$, $z + \frac{x+y}{2} = 29$. Et multipliant tout par les dénominateurs pour ôter les fractions.

J'ay $2x + y + z = 50$. premiere équation.

$3y + x + z = 78$. seconde équation.

$2z + x + y = 58$. troisiéme équation.

Je choisis une de ces trois équations qui me donne une valeur d'une des trois inconnuës, par exemple la premiere donne par transposition $y = 50 - 2x - z$. Je substitue (par regle generale) cette valeur d'y, dans les deux autres équations, & j'ay

$\underline{150 - 6x - 3z} + x + z = 78$. seconde équation derivée.

$2z + x + \underline{50 - 2x - z} = 58$. troisiéme équation.

Par transposition, addition, &c.

J'ay $5x + 2z = 72$. seconde équation derivée.

$2z = x + 8$. troisiéme équation.

Je substitue cette valeur de z dans l'équation precedente $5x + 2z = 72$, & je trouve $7x + 16 = 72$ ou $7x = 56$, & $x = 8$, & substituant cette valeur connuë d'x dans l'équation $z = x + 8$, je trouve $z = 16$; enfin substituant ces deux valeurs d'x & de z, dans l'équation $y = 50 - 2x - z$, je trouve $y = 18$, & le probleme est resolu.

$x = 8$.
$y = 18$.
$z = 16$. la preuve est aisée.

Cet exemple peut servir de modele pour tous les problemes déterminez du premier degré où il y a plusieurs inconnuës.

ARTICLE III.

Des Problemes plus que déterminez, où il y a une ou plusieurs inconnuës.

LEs Problemes plus que déterminez sont ceux où il y a plus d'équations que d'inconnuës. On les resout de même que les problemes déterminez avec ces deux differences. 1°. Qu'on a la liberté de choisir entre ces équations celles qui sont plus simples & plus faciles, au lieu que dans les problemes déterminez, il faut se servir de toutes les équations données. 2°. Lorsque par le moyen de ces équations choisies on est venu à connoître les inconnuës, il faut qu'en substituant leurs valeurs dans les équations restantes dont on ne s'est pas servi, il faut, dis-je, que les deux membres de l'équation se trouvent les mêmes; autrement le probleme est impossible.

Premier Exemple.

Trouver un nombre qui soit tel qu'étant multiplié par 7, & le produit augmenté de 8, la somme soit 43, & que ce même nombre étant multiplié par 10, & le produit diminué de 13 le reste soit 37.

Ce nombre eſt x, donc $7x + 8 = 43$. & $10x - 13 = 37$. par la premiere équation reduite, j'ay $7x = 35$ & $x = 5$, & ſubſtituant cette valeur dans la ſeconde équation $10x - 13 = 37$. J'ay $50 - 13 = 37$, ou $37 = 37$. & le probleme eſt reſolu.

Second Exemple.

Il faut reſoudre un Probleme qui ſe reduit à ces deux équations $3x + 7 = 5x - 31$, & $\frac{x}{6} + 5 = 13$.

Par la premiere équation réduite je trouve $x = 19$; mais en ſubſtituant cette valeur d'x dans la ſeconde équation $\frac{x}{6} + 5 = 13$, je trouve $\frac{19}{6} + 5 = 13$, qui eſt une équation abſurde d'où je conclus que le Probleme eſt impoſſible.

Troiſiéme Exemple.

Trouver deux nombres x & y avec ces trois conditions. 1°. Que le premier avec la moitié du ſecond faſſe 42, ou que $x + \frac{1}{2} y = 42$. 2°. Que $y + \frac{1}{3} x = 34$. 3°. Que $\frac{x + y}{2} = 27$. J'ay ces trois équations delivrées de fractions $2x + y = 84$, $3y + x = 102$ & $x + y = 54$. & comme je n'ay que deux inconnuës

nuës le Probleme est plus que determiné, je choisis les deux plus simples équations $y = 84 - 2x$ & $y = 54 - x$, d'où je tire cette troisiéme $84 - 2x = 54 - x$ & $x = 30$, & par consequent $y = 24$. le probleme est resolu s'il est possible ; & pour m'en assurer je substitue ces deux valeurs d'x & d'y dans l'équation restante $3y + x = 102$, & je trouve $72 + 30 = 102$ ou $102 = 102$. d'où je conclus que le probleme est resolu.

ARTICLE IV.

Methode nouvelle pour la resolution des Problemes indéterminez du premier degré.

LEs Problemes indéterminez sont ceux où il y a moins d'équations que d'inconnuës, on les resout de même que les Problemes déterminez avec ces deux differences. 1°. Qu'on ne peut pas faire évanoüir toutes les inconnuës hors une, comme dans les Problemes déterminez. 2°. Qu'on peut aprés cela substituer pour les inconnuës restantes des valeurs arbitraires. L'élegance de la resolution consiste à éviter les nombres negatifs & les fractions ; & à trouver toutes les resolutions possibles en nombres entiers, ou du moins la methode de les trouver toutes, lors qu'il y en a une infinité.

EXEMPLE.

Trouver l'année de la periode Julienne où le Cycle solaire est 13, le Cycle d'or ou lunaire 10, & l'indiction 7.

La periode Julienne est de 7980 années, chacune de 365 jours & 6 heures; elle est composée de trois Cycles: du Cycle solaire qui est de 28 ans; du Cycle d'or qui est de 19, & du Cycle de l'indiction qui est de 15. Le Cycle solaire est de 28 ans, parce qu'avant la correction du Calendrier faite par Gregoire XIII. en 1582. le même quantiéme du mois y tomboit *regulierement* dans la même ferie, c'est à dire le même jour de la semaine. Car l'année ordinaire étant composée de 365 jours, elle comprend 52 semaines & 1 jour, de sorte que si le premier de Janvier est un Dimanche, le 30 Decembre sera un Samedy, & le 31 un Dimanche; & le premier Janvier de l'année suivante sera un Lundy. Par la même raison le premier Janvier de la troisiéme année seroit un Mardy, & la quatriéme un Mercredy, &c. la septiéme un Samedy; & la huitiéme seroit encor un Dimanche, & ainsi de suite de 7 en 7 ans; mais parce que la

quatriéme année est de 366 jours, ou de 52 semaines & 2 jours, la cinquiéme année au lieu de commencer par un Jeudy, commencera par un Vendredy, & cette irregularité qui arrive de 4 en 4 ans fait que les mêmes quantiémes du mois ne répondent de suite & par ordre aux mêmes feries qu'au bout de 4 fois 7 ans ou de 28 ans. Ainsi le premier Janvier tombera un Dimanche la premiere année, la septiéme, la dix-huitiéme & la vingt-quatriéme, il tombera un Lundy la seconde année, la huitiéme, la treiziéme, la dix-neuviéme, & ainsi de suite de 28 ans en 28 ans. Mais depuis la correction du Calendrier qui retranche trois bissextiles sur 400 ans, le cycle solaire ou des lettres Dominicales est de 2800 ans, & la periode Gregorienne est de 798000 ans. Ce cycle de 2800 ans est encore trop petit suivant les observations exactes de Monsieur Cassini, parce qu'il faudroit retrancher outre les trois jours sur chaque 400 ans, 1 jour sur chaque 2400, en sorte que les années 4000, 6400, 8800, ne fussent pas bissextiles; & selon ce calcul le cycle solaire seroit de 16800 ans.

Le cycle d'or ou le cycle lunaire est de 19 ans, parce que au bout de 19

ans le même quantiéme du mois est aussi à peu prés le même quantiéme de la Lune. Voyez ce que j'ay dit là dessus pag. 137, 138, 139 & 140. Enfin le cycle de l'indiction est de 15 ans; c'étoit une espece de tribut qu'on payoit aux Empereurs Romains en trois payemens de 5 en 5 ans. Les Papes dattent encore leurs Bulles de l'année de l'indiction, ce n'est pas icy le lieu d'en dire davantage sur l'origine & l'usage de ces trois cycles. Il suffit de savoir que la periode Julienne est ainsi appellée du nom de Jules César, parce que toutes les années y sont de 365 jours, 6 heures, suivant la correction du Calendrier que fit ce Prince étant souverain Pontife: que Joseph Scaliger l'a inventée: qu'on suppose que la premiere année de la periode Julienne, on ait 1 de cycle solaire, 1 de cycle lunaire & 1 d'indiction: la seconde année on a 2, 2, 2, la troisiéme 3, 3, 3, &c. la seiziéme on a 16 de cycle solaire, 16 de cycle lunaire & 1 d'indiction qui recommence. La vingtiéme année on a 20 de cycle solaire, 1 de cycle lunaire & 5 d'indiction; la 29 année on a 1 de cycle solaire, 10 de cycle lunaire & 14 d'indiction; & ainsi de suite. On ne trouve

les trois mêmes nombres pour les trois cycles qu'au bout de 7980 ans, parce que 28, 19, 15 ſont trois nombres premiers entre eux, & que leur produit continuel eſt 7980. Cette periode dont on a fait tant de bruit eſt une periode imaginaire & chimerique. Il n'y a nul fondement, ni nulle apparence de raiſon pour joindre la periode de l'indiction, qui eſt une choſe purement arbitraire, à la periode naturelle du cycle d'or; & à la periode moitié naturelle & moitié arbitraire du cycle ſolaire. On ne trouvera aucun évenement hiſtorique qui puiſſe être fixé par ce moyen. La periode Julienne ne peut tout au plus être employée que depuis la reformation de Céſar juſques à la reformation de Gregoire XIII. & il eſt ridicule d'imaginer avec la pluſpart des Chronologiſtes, une periode qui commence pluſieurs ſiécles avant la Création du Monde. Le cycle ſolaire ſeul ſuffit pour déterminer à 5 ans prés au moins un évenement, dont on rapporte le quantiéme du mois & le jour de la ferie, &c.

Mais ſuppoſé que quelque évenement fût datté de l'année 13. du cycle ſolaire, de l'année 10 du cycle lunaire; & de l'année 7 de l'indiction, on pourroit dé-

terminer precisément, combien il y a d'années que cet évenement est arrivé; car dans la periode imaginaire de 7980 ans, l'année courante 1697. est la 6410eme, & nous avons 26 de cycle solaire, parce que divisant 6410 par 28, le quotient est 228, & il reste 26; le nombre d'or est 7. parce que divisant 6410 par 19, le quotient est 337. & il reste 7; l'indiction est 5, parce que divisant 6410 par 15, le quotient est 427, & il reste 5.

Ainsi pour resoudre ce Probleme je le dépoüille de ce qu'il a de Chronologique pour ne le considerer que sous l'idée abstraite des nombres, & il se reduit à cette question.

Trouver un nombre tel qu'étant divisé par 28. il reste 13, qu'étant divisé par 19. il reste 10, & qu'étant divisé par 15, il reste 7.

Soit ce nombre x, donc $\frac{x-13}{28} = y$, $\frac{x-10}{19} = z$, $\frac{x-7}{15} = u$. J'ay trois équations & quatre inconnuës, x, y, z, u; c'est pourquoy le probleme est indeterminé. Mais parce que y, z, u doivent être des nombres entiers & positifs, je ne puis pas prendre pour x

tout nombre donné. 1°. Parce que $x - 13$ doit être un nombre positif, il faut que x soit plus grand que 13. 2°. Parce que $\frac{x - 13}{28}$ doit être un nombre entier, il faut que x surpasse de 13 un multiple de 28, afin que l'équation $\frac{x - 13}{28} = y$ se transforme en l'une de celles-cy $\frac{41 - 13}{28} = \frac{28}{28} = 1$, ou $\frac{69 - 13}{28} = \frac{56}{28} = 2$, &c. 3°. Il faut que x surpasse de 10 un multiple de 19. afin que l'équation $\frac{x - 10}{19} = z$ se transforme en l'une de celles-cy $\frac{29 - 10}{19} = \frac{19}{19} = 1$, $\frac{48 - 10}{19} = \frac{38}{19} = 2$,&c. 4°. Parce que c'est le même x dans ces deux équations, il faut que dans les suites de ces nombres 41, 69, 97,&c. & 29, 48, 67, &c. il s'en trouve un commun aux deux suites, c'est à dire qu'il faut que $28m + 13 = 19n + 10$, ou $28m = 19n - 3$ & $m = \frac{19n - 3}{28}$; sur quoy je fais cette reflexion qui comprend tout l'esprit de la methode. Il est seur qu'en prenant $28n$ pour numerateur, & 28 pour dénominateur le

quotient sera n, nombre entier. Or puisque 28 mesure $28n$ par construction, & qu'il mesure $19n - 3$ par hypothese, il mesurera aussi leur difference $9n + 3$, & son multiple $18n + 6$, donc il mesurera aussi la difference de $19n + 3$ à $18n + 6$, c'est à dire qu'il mesurera $n - 9$. donc $\frac{n-9}{28}$ doit être un nombre entier. Je le prens le plus petit qu'il est possible; & je suppose $\frac{n-9}{28} = 0$. ce qui me donne $n = 9$; si je suppose $\frac{n-9}{28} = 1$. j'auray $n = 37$; si je suppose $\frac{n-9}{28} = 2$ j'auray $n = 65$, &c. & toutes ces valeurs d'n satisfont. Je substitue la plus simple valeur d'n dans l'équation $x = 19n + 10 = 28m + 13$, & je trouve 181 qui satisfait aux deux premieres équations $\frac{x-13}{28} = y$ & $\frac{x-10}{19} = z$, au lieu desquelles j'ay $\frac{181-13}{28} = \frac{168}{28} = 6$ & $\frac{181-10}{19} = \frac{171}{19} = 9$. Mais cette valeur étant substituée dans la troisiéme équation $\frac{x-7}{15} = z$, je trouve $\frac{181-7}{15}$ =

$= \frac{174}{15} = 11 \frac{9}{15}$, qui n'eſt pas un nombre entier; c'eſt pourquoy il faut prendre une autre valeur d'x. Or la valeur d'$x = 181$ vient de la valeur d'$n = 9$. toutes les valeurs d'n ſont

$n = 9$ qui donne $19n + 10 = 181$.

$n = 37$, qui donne $19n + 10 = 713 = 181 + 532 = 181 + 28$ fois 19.

$n = 65$, qui donne $19n + 10 = 1245 = 181 + 2$ fois 532.

$n = 93$, qui donne $19n + 10 = 1777 = 181 + 3$ fois 532.

Il ne s'agit donc plus que de reſoudre l'équation $\frac{532f + 181 - 7}{15} = g$. Car x doit être un des nombres 181, 713, 1245, &c. c'eſt à dire que x doit être $= 532f + 181$. & par conſequent $x - 7 = 532f + 174$. J'ôte de $532f + 174$ tous les multiples de 15, il reſte $\frac{7f + 9}{15}$ à rendre égal à un nombre entier; j'opere comme cy-deſſus, en ſuppoſant $15f$ dont j'ôte $7f + 9$ ou $14f + 18$, ou $14f + 3$, il reſte $\frac{f - 3}{15} = 0$. donc $f = 3$. & par conſequent $532f + 181 = 1777 = x$ nombre cherché. La preuve en eſt ai-

ſée, car diviſant 1777 par 28, par 19, par 15, & negligeant les quotients les reſtes ſont 13, 10, & 7. conformement à la queſtion. La choſe ſeroit donc arrivée l'année 1777 de la Periode Julienne; & par conſequent il y a 4633 ans. Pour avoir toutes les reſolutions à l'infini, c'eſt à dire toutes les valeurs d'x, il n'y a qu'à prendre toutes les valeurs d'f, $f = 3 = 18 = 3 + 15$, $= 33 = 3 + 30 = 3 +$ 2 fois 15, &c. ou bien il n'y a qu'à ajoûter continuellement à 1777 le nombre 7980 = 15 fois 532 = 15 fois 19 fois 28, & on aura les valeurs d'$x = 1777 = 9757 = 17737$, &c.

Il n'y a proprement que la premiere valeur d'$x = 1777$ qui ſatisfaſſe au Probleme de la Periode Julienne, & ce Probleme eſt determiné chronologiquement; mais il eſt indéterminé arithmetiquement.

Ces reſtrictions de nombre poſitifs, de nombres rationnaux, & de nombres entiers tiennent quelquefois lieu d'une ou de pluſieurs équations, & rendent déterminé & ſouvent impoſſible un Probleme qui de ſa nature ſeroit indéterminé.

Ce Probleme renferme toute la difficulté, & toute l'élegance des Problemes

indéterminez du premier degré, la methode est nouvelle & peut s'appliquer aux Problemes des degrez plus élevez, comme j'espere le faire voir dans le receüil des nouvelles découvertes. Remarquez que lors qu'il y a plus d'une inconnuë dans un Probleme, il faut afin qu'il soit du premier degré, que chaque inconnuë soit au premier degré, & qu'une inconnuë ne multiplie point l'autre.

On pourra s'exercer sur les Problemes suivans. 1°. Ayant deux, trois, ou plusieurs choses de differens prix, comme de l'or, de l'argent, du cuivre, &c. en faire un aloy d'un prix moyen donné. C'est ce qu'on appelle la Regle d'alliage, & ce ne sont que differens cas des Problemes déterminez ou indéterminez du premier degré. 2°. Ayant differentes especes, comme des Loüis d'or, des écus &c. en faire une somme donnée dans toutes les manieres possibles. 3°. Sachant combien de personnes en tout ont été dans un festin, hommes, femmes & enfans, les differens prix qu'ont payé par tête chaque homme, chaque femme & chaque enfant, & la somme totale, trouver le nombre particulier des hommes, des femmes & des enfans.

CHAPITRE II.

Des Problemes du second degré.

ARTICLE I.

Des Problemes déterminez.

TOutes les équations du second degré se peuvent réduire à l'une de ces six formules.

1°. $xx = b$. 2°. $xx = -b$.
3°. $xx = ax + b$. 4° $xx = b - ax$.
5°. $xx = ax - b$. 6°. $xx = -ax - b$.

La formule $xx = ax$ n'est pas du second degré, parce que divisant tout par x elle se réduit à cette équation du premier degré $x = a$.

Dans la premiere formule $xx = b$ les deux racines de l'équation, c'est à dire les deux valeurs d'x sont toutes deux réelles l'une positive qui est $x = \sqrt{b}$, & l'autre negative qui est $x = -\sqrt{b}$, Comme si $xx = 9$. une des valeurs d'x est $+ 3$. & l'autre est $- 3$; car $+ 3$ par $+ 3$ produit $+ 9$, & $- 3$ par $- 3$ produit encore $+ 9$, suivant la Re-

gle générale que — *par* — *produit* +. Pour resoudre cette premiere formule il n'y a qu'à tirer la racine quarrée de b, comme si $xx = 1369$. donc $x = 37$ & $x = -37$, & si $xx = 7$ donc $x = \sqrt{7}$ & $x = -\sqrt{7}$.

Dans la seconde formule $xx = -b$, les deux racines sont semblables aux deux racines de la formule precedente, mais elles sont toutes deux imaginaires, l'une positive qui est $x = +\sqrt{-b}$, & l'autre negative qui est $x = -\sqrt{-b}$. comme si $xx = -9$. on aura $x = +\sqrt{-9}$, & $x = -\sqrt{-9}$. & si $xx = -7$ on aura $x = +\sqrt{-7}$, & $x = -\sqrt{-7}$. On appelle ces racines *imaginaires*, parce que l'on ne s'en peut former aucune idée. Les racines réelles negatives resolvent le Probleme dans un sens opposé; mais les racines imaginaires ne le resolvent dans aucun sens, les racines réelles negatives donnent souvent dans la Geometrie des resolutions réelles, mais au lieu de retrancher la ligne qui est representée par l'inconnuë, il faut l'ajoûter; & au lieu de l'ajoûter il faut la retrancher, &c. Les racines imaginaires marquent seulement que le Probleme est impossible, comme d'inscrire dans un cercle une ligne plus grande

que le Diametre, elles servent à faire voir en quoy consiste l'impossibilité du Probleme; & à conserver l'analogie dans le nombre des racines.

Dans la troisiéme formule $xx = ax + b$, & dans la quatriéme qui luy est opposée $xx = b - ax$, il y a toûjours deux racines réelles, l'une positive & l'autre negative; & celle qui est positive dans la troisiéme est negative dans la quatriéme, & au contraire.

Ces deux racines sont pour la troisiéme formule $x = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + b}$, & $x = \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa + b}$. Pour la quatriéme formule on a $x = -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + b}$, & $x = -\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa + b}$. Par exemple si $xx = 10x + 144$, on aura $x = 5 + \sqrt{25 + 144} = 5 + \sqrt{169} = 5 + 13 = 18$. & $x = 5 - 13 = -8$. les deux valeurs d'x sont $+18$ & -8; & si $xx = 144 - 10x$ les deux valeurs d'x seront $x = -5 + \sqrt{25 + 144} = -5 + 13 = +8$ & $x = -18$. Si $xx = 10x + 8$. les deux racines seront $x = 5 + \sqrt{33}$, & $x = 5 - \sqrt{33}$. Enfin si $xx = 8 - 10x$ les deux racines seront $x = \sqrt{33} - 5$, & $x = -\sqrt{33} - 5$.

Dans la cinquiéme & dans la sixiéme formule $xx = ax - b$, & $xx = -ax - b$. Il y a deux racines ou toutes deux réelles, ou toutes deux imaginaires; celles qui sont toutes deux positives dans la cinquiéme formule sont toutes deux negatives dans la sixiéme.

Ces deux racines sont $x = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - b}$, & $x = \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - b}$. Par exemple si $xx = 10x - 16$, on aura $x = 5 + \sqrt{25 - 16} = 5 + \sqrt{9} = 5 + 3 = 8$, & $x = 5 - \sqrt{25 - 16} = 5 - \sqrt{9} = 5 - 3 = 2$. Les deux valeurs d'$x$ sont 8 & 2. & si $xx = -10x - 16$. les deux valeurs seront -8 & -2.

Lorsque $\frac{1}{4}aa = b$ les deux valeurs sont égales, comme si $xx = 10x - 25$, les deux racines sont $x = 5 + 0$ & $x = 5 - 0$. c'est à dire $x = 5$. & pour $xx = -10x - 25$, on a $x = -5$. Lorsque $\frac{1}{4}aa$ est plus grand que b, les deux racines sont réelles & positives dans la cinquiéme formule; elles sont réelles & negatives dans la sixiéme, comme dans l'équation cy-dessus $xx = 10x - 16$ & $xx = -10 - 16$.

Enfin lorsque $\frac{1}{4}aa$ est plus petit que b, les deux racines sont imaginaires &

positives dans la cinquiéme formule ; elles sont imaginaires & negatives dans la sixiéme, comme si $xx = 8x - 25$, on aura $x = 4 + \sqrt{-3}$, & $x = 4 - \sqrt{-3}$; & si $xx = 8x - 25$ on aura $x = -4 + \sqrt{-3}$ & $-4 - \sqrt{-3}$. Si $xx = 10x - 37$ on aura $x = 5 + \sqrt{-12}$, & $x = 5 - \sqrt{-12}$, si $xx = 10x - 60$ on aura $x = 5 + \sqrt{-35}$ & $x = 5 - \sqrt{-35}$. Cette derniere racine peut passer pour positive, quoique $\sqrt{35}$ soit plus grande que 5, parce qu'on n'a égard qu'au nombre réel 5, qui est positif.

Si $xx = 10x - 7$ on aura $x = 5 + \sqrt{18}$ & $x = 5 - \sqrt{18}$. Ces six formules peuvent être réduites à celle-cy seule $xx = \pm ax \pm b$. Dans laquelle on peut supposer indistinctement a ou $b = 0$, les deux racines qui satisfont, & qui satisfont seules sont $x = \pm \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa \pm b}$, & $x = \pm \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa \pm b}$, d'où je tire cette Regle générale.

1°. Prenez la moitié de l'absolu du second terme. 2°. Quarrez cette moitié & l'ajoûtez à l'absolu du dernier terme sans changer son signe. 3°. Tirez la racine quarrée de la somme. 4°. A-

joûtez & ôtez cette racine de l'absolu du second terme sans changer son signe, la somme & le reste donneront les deux racines cherchées.

Pour éviter les fractions, lors que l'absolu du second terme est un nombre impair, on peut ajoûter le quarré de cet absolu au quadruple du dernier terme sans changer son signe; & tirer la racine quarrée de la somme. 3°. Oter & ajoûter cette racine à l'absolu du second terme sans changer son signe. 4°. La moitié de la somme & du reste donneront les deux racines cherchées.

Demonstration.

Pour démontrer que lorsque $xx = \pm ax \pm b$, les deux valeurs d'x sont $\pm \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa \pm b}$, & $\pm \frac{1}{2}a \mp \sqrt{\frac{1}{4}aa \pm b}$. Je quarre chacune de ces valeurs pour avoir la valeur d'xx, premier membre de l'équation. $\pm \frac{1}{2}aa \pm b \pm a\sqrt{\frac{1}{4}aa \pm b}$. Je multiplie ensuite cette valeur d'x par a pour avoir la valeur d'ax, & au produit j'ajoûte b; & je trouve pour second membre de l'équation $\pm \frac{1}{2}aa \pm a\sqrt{\frac{1}{4}aa + b} \pm b$, qui est égal ou le même que le premier donc &c.

d'un côté & des x & des nombres de l'autre, ce qui donne une équation du premier degré. Par exemple si l'on à ces deux équations $xx = 10x + 144$, & $xx = 30x - 216$, donc $10 + 144 = 30x - 216$ & $x = 18$.

Lors qu'on n'est pas assuré par la nature de la question que le Probleme plus que determiné est possible, il faut aprés avoir trouvé la valeur de l'inconnuë, la substituer dans toutes les équations pour s'assurer si elle satisfait, que si les deux membres d'une équation ne se trouvent pas égaux, aprés la substitution le Probleme est impossible.

Il y a encore une maniere de resoudre les Problemes plus que déterminez, c'est de transposer tous les termes de l'équation d'un côté, en sorte qu'un des membres soit o, & de diviser ensuite continuellement une équation par l'autre, ou la plus élevée par celle qui l'est moins jusques à ce que l'on trouve une commune mesure, ou un dernier reste, qui sera aussi égal à zero; & qui donnera l'équation la plus simple pour la valeur de l'inconnuë cherchée. Ainsi dans l'exemple cy-dessus $xx = 10x + 144$, & $xx = 30x - 216$. J'ay par transposition $xx - 10x - 144 = 0$; &

& $xx - 30x + 216 = 0$. Je divise $xx - 30x + 216$ par $xx - 10x - 144$. le quotient est 1. que je neglige ; & il reste $- 20x + 360$ qui doit necessairement être égal à zero. J'ay donc $- 20x + 360 = 0$, ou par transposition $360 = 20x$ & $x = 18$.

La raison de cette operation est que zero divisé par zero donne zero, & que zero ôté de zero il reste zero.

ARTICLE III.

Des Problemes indéterminez du second degré.

LEs Problemes indéterminez du second degré sont plus difficiles que ceux du premier. Il suffit dans ceux-cy d'éviter les nombres negatifs au lieu que dans ceux-là, il faut encore éviter les irrationnaux, toute l'adresse consiste à réduire l'équation du second degré à une équation du premier ; & il y a deux principales manieres de le faire.

1°. Formez tellement l'équation avec une indéterminée arbitraire que le quarré de l'inconnuë se trouvant le même dans les deux membres, il ne reste plus que l'inconnuë au premier degré d'un

côté, & des nombres de l'autre.

2°. Lorsque l'absolu se trouve un quarré positif, on forme l'équation de maniere que ce quarré se trouve dans les deux membres, & l'ôtant de part & d'autre, il ne reste que l'inconnuë au second & au premier degré ; & divisant tout par cette même inconnuë, il ne reste que l'inconnuë au premier degré d'un côté, & des nombres de l'autre, les exemples éclairciront la Regle.

Premier Probleme.

Diviser un nombre quarré en deux, ou plusieurs nombres quarrez.

Il faut diviser 25 en deux nombres quarrez, soit l'un xx & l'autre yy, j'ay donc $xx + yy = 25$, cette équation est inutile ; car si je prens arbitrairement $x = 1$. j'auray $yy = 24$ & $y = \sqrt{24}$, qui est un nombre irrationel, & on veut un nombre rationel ; si je suppose $x = 2$, j'auray $yy = 21$ & $y = \sqrt{21}$, qui est encore un nombre irrationel. C'est pourquoy je suppose pour côté du premier quarré le nombre x, & pour côté du second le nombre $ax - 5$, la somme des quarrez sera $xx + aaxx - 10ax + 25 = 25$; & par transposition

$xx + aaxx = 10ax$, & divisant tout par x, j'ay $x + aax = 10a$; & enfin $x = \frac{10a}{aa+1}$, donc $ax - 5 = \frac{5aa - 5}{aa+1}$ & le Probleme est resolu indefiniment. Car le quarré de $\frac{10a}{aa+1}$ est $\frac{100aa}{a^4 + 2aa + 1}$ le quarré de $\frac{5aa - 5}{aa+1}$ est $\frac{25a^4 - 50aa + 25}{a^4 + 2aa + 1}$, la somme de ces quarrez est $\frac{25a^4 + 50aa + 25}{a^4 + 2aa + 1} = 25$ conformément au Probleme ; mais afin que $\frac{5aa - 5}{aa+1}$ soit un nombre positif, il faut que $5aa$ soit plus grand que 5, ou que a soit plus grand que 1. Ainsi prenant $a = 2$ je trouve $x = \frac{10a}{aa+1} = \frac{20}{5} = 4$ & $y = \frac{5aa - 5}{aa+1} = \frac{15}{5} = 3$. Les deux nombres cherchez sont donc 4 & 3, dont les quarrez 16 & 9 font 25, & c'est la seule resolution possible en entiers. Si l'on prend $a = 3$, on trouvera la même resolution en ordre contraire, c'est à dire $x = 3$ & $y = 4$. Si l'on prend $a = 4$ on trouvera $x = \frac{40}{17}$ & $y = \frac{75}{17}$ leurs quarrez sont $\frac{1600}{289}$ & $\frac{5625}{289}$, dont la somme $\frac{7225}{289} = 25$;

& ainsi de suite à l'infini.

Soit en général le nombre quarré donné $= bb$ on trouvera $x = \frac{2ab}{aa+1}$ & $y = \frac{aab - b}{aa+1}$.

Pour diviser le même nombre quarré, par exemple 25 en trois quarrez, il n'y a qu'à diviser encore l'un des deux quarrez 16 ou 9 en deux quarrez, pour diviser 25 en quatre quarrez, il n'y a qu'à diviser 16 & 9 chacun en deux quarrez; pour le diviser en 5 quarrez il faut d'abord le diviser en 3, & ensuite deux de ces trois quarrez chacun en deux, & ainsi de suite.

Ce Probleme sert de fondement à tous les Problemes sur les triangles rectangles. Euclide a démontré Livre 1. pag. 47. que dans tout triangle rectangle, comme A B C, le quarré du côté opposé à l'angle droit est égal au quarré des deux autres, les Algebristes ont formé là dessus une infinité de questions, en supposant trois nombres tels que la somme des quarrez des deux petits soit égale au quarré

quarré du plus grand; & qui ayent outre cela d'autres proprietez.

Si l'on prend deux nombres inégaux quelconques a & b, comme generateurs, je dis que les trois nombres $aa + bb$, $aa - bb$ & $2ab$ formeront un triangle rectangle. Car le quarré de $aa + bb$ est $a^4 + 2aabb + b^4 = a^4 - 2aabb + b4 + 4aabb$. Soit $a = 2$ & $b = 1$. on trouvera 5, 3 & 4. Soit $a = 3$ & $b = 2$ on trouvera 13, 5 & 12. &c.

Second Probleme.

Diviser la somme de deux quarrez en deux autres quarrez.

Soit $13 = 9 + 4$, il faut diviser 13 en deux autres quarrez. J'ay $xx + yy = 13$. je suppose $x = z - 3$ & $y = az - 2$, il est évident que cette supposition convient à tous les nombres possibles, & c'est à quoy il faut toûjours avoir égard, donc $xx = zz - 6z + 9$ & $yy = zzaa - 4az + 4$. donc $xx + yy = zz + aazz - 6z - 4az + 13 = 13$. ôtant 13 de part & d'autre & transposant je trouve $zz + aazz = 4az + 6z$ divisant tout par z. J'ay $z + aaz = 4a + 6$, & enfin divisent tout par $aa + 1$, j'ay $z =$

$\frac{4a+6}{aa+1}$, & le Probleme eſt reſolu. Car en ſubſtituant cette valeur dans les deux équations $x = z - 3$ & $y = az - 2$. J'auray deux valeurs indéterminées $x = \frac{4a+3-3aa}{aa+1}$ & $y = \frac{2aa+6a-2}{aa+1}$.

Il faut que $4a+3$ ſoit plus grand que $3aa$, je les ſuppoſe égaux; & je trouve $a = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{13} = \frac{2+\sqrt{13}}{3}$. Il faut donc prendre a plus petit que $\frac{2+\sqrt{13}}{3}$. Je ſuppoſe $a = \frac{1}{2}$ & je trouve $x = \frac{17}{5}$ & $y = \frac{6}{5}$, la ſomme des quarrez eſt $\frac{289}{25} + \frac{36}{25} = \frac{325}{25} = 13$.

Soit la ſomme des quarrez donnez $aa + bb$, on trouvera $x = z - a$ & $y = cz - b$ & $z = \frac{2a+2bc}{cc+1}$. Il faut que c ſoit plus petit que $\frac{b+\sqrt{bb+aa}}{a}$ on auroit pu auſſi ſuppoſer $x = z + 3$ & $y = az - 2$, ou $x = 3 - z$ & $y = az + 2$.

ARTICLE IV.

Methode nouvelle pour la resolution des doubles & des triples Equations du second degré.

ON appelle double & triple Equation du second degré toute double ou triple équation indéterminée, dans laquelle il n'y a d'un côté qu'une même inconnuë au premier ou au second degré, & de l'autre côté une inconnuë indéterminée du second degré. Par exemple on demande un nombre tel que $4x + 6 = yy$, & $9x + 13 = zz$. S'il n'y avoit qu'une seule équation, comme $4x + 6 = yy$, je n'aurois qu'à prendre pour y tout nombre quarré plus grand que 6, comme par exemple 36. & j'aurois $4x + 6 = 36$ ou $4x = 30$ & $x = 7\frac{1}{2}$. Mais en substituant cette valeur d'x dans la seconde équation $9x + 13 = z$ j'aurois $80\frac{1}{2} = zz$, ce qui ne satisfait pas à la question, parce que $80\frac{1}{2}$ n'est pas un nombre quarré; c'est pourquoy je cherche à réduire cette double équation à une seule, & voicy comment je raisonne. Puisque $4x + 6 = yy$ si l'on fait $4 . 9 : 4x + 6 . 9x$

$+ 13\frac{1}{2}$. Et comme $4.9 : yy. 9yy$, il est évident que $9x + 13\frac{1}{2} = \frac{9}{4}yy$, mais par l'hypothese $9x + 13 = zz$. donc ôtant $9x + 13$ de $9x + 13\frac{1}{2}$, & zz de $\frac{9}{4}yy$, les restes seront égaux; c'est à dire que $\frac{9}{4}yy - \frac{1}{2} = zz$, & multipliant tout par 4 pour ôter les fractions, j'auray $9yy - 2 = 4zz$; & c'est l'équation simple qui me reste à resoudre, car yy est quarré par hypothese, il suffit donc de faire en sorte que $9yy - 2$ soit égal à un nombre quarré. Je suppose que son côté est $3y - a$; donc $9yy - 2 = 9yy - 6ay + aa$, & $y = \frac{aa + 2}{6a}$ & $yy = \frac{a^4 + 4aa + 4}{36aa} = 4x + 6$, donc $a^4 + 4aa + 4 = 144aax + 216aa$ & $x = \frac{a^4 - 212aa + 4}{36aa}$. Le Probleme est resolu indefiniment; il faut prendre pour a un nombre tel que $a^4 - 212aa + 4$ soit un nombre positif. Je suppose $a^4 = 212aa - 4$, & je trouve $a = \sqrt{:106 \pm \sqrt{11232}}$, le nombre entier qui approche le plus par excez est 15. Je substitue 15 dans l'équation $\frac{aa + 2}{6a} = y$, & je trouve $y = \frac{227}{90}$; & par

conséquent $yy = \frac{51529}{8100} = 4x + 6$. Je multiplie tout par 8100, j'ay $51529 = 32400x + 48600$ & $x = \frac{2929}{32400}$ nombre cherché. Enfin substituant cette valeur dans l'équation $9x + 13 = zz$, je trouve $z = \frac{223}{60}$.

Toutes les doubles équations du premier degré, dans lesquelles les nombres de l'inconnuë sont affectez du même signe + ou — se réduiront à une équation simple du second degré. Ainsi

$$\pm ax \pm b = yy.$$
$$\pm cx \pm d = zz.$$

Se transformera en cette équation simple $acyy \pm abc \pm aad = uu$. Par exemple soit la double équation.

$$3x + 15 = yy,$$
$$8x - 7 = zz.$$

Je fais 3 . 8 : 15 . 40. donc $8x + 40 = \frac{8yy}{3}$; or $8x - 7 = zz$ donc $\frac{8}{3}yy - 47 = zz$, donc multipliant tout par 9 quarré du dénominateur 3, j'auray l'équation simple à resoudre $24yy - 423 = 9zz = uu$. La double équation $300 - 20x = yy$
$375 - 15x = zz$, se transformera en celle-cy $3yy + 600 = uu$.

Lorsque les signes de l'inconnuë sont differens, comme si l'on avoit

$$3x - 26 = yy$$
$$186 - 5x = zz.$$

On aura par transposition $\frac{yy + 26}{3} = \frac{186 - zz}{5} = x$, & par consequent multipliant tout par 3 & par 5, j'auray $5yy + 130 = 558 - 3zz$, ou $zz = \frac{428 - 5yy}{3}$; je multiplie tout par 9, & j'ay enfin l'équation simple à resoudre $1284 - 15yy = 9zz = uu$.

Toutes les équations indéterminées doubles, triples, quadruples, &c. à quelque degré que monte l'inconnuë principale x, & les inconnuës du second membre y, z, &c. Pourront par cette methode se réduire à une seule équation; mais cette équation sera d'autant plus élevée & plus composée qu'il y aura un plus grand nombre d'équations particulieres; & que les inconnuës seront élevées à un plus haut degré. Ainsi pour resoudre généralement toutes les questions indéterminées, il suffiroit d'avoir une methode pour resoudre toute équation simple indéterminée. Mais bien loin d'avoir cette methode générale, pour tous les degrez,

on n'a pas seulement de methode générale pour le second degré ; & il ne suffit pas de donner une resolution, il faut les donner toutes en entiers & en fraction. Je donneray ce que j'ay trouvé là dessus dans le receüil de mes nouvelles découvertes.

CHAPITRE III.

Des Problemes du troisiéme & du quatriéme degré.

LEs Problemes déterminez du troisiéme degré se peuvent tous réduire à 18 formules.

$x^3 = b$

$x^3 = -b$

$x^3 = ax + b$

$x^3 = ax - b$

$x^3 = b - ax$

$x^3 = -ax - b$

$x^3 = axx + b$

$x^3 = axx - b$

$x^3 = b - axx$

$x^3 = -axx - b$

$$x^3 = axx + bx + c$$
$$x^3 = axx + bx - c$$
$$x^3 = axx - bx + c$$
$$x^3 = axx - bx - c$$
$$x^3 = -axx + bx + c$$
$$x^3 = -axx + bx - c$$
$$x^3 = -axx - bx + c$$
$$x^3 = -axx - bx - c.$$

Ces 18 formules ſe peuvent réduire à 14, en retranchant les quatre purement negatives, ou à celle-cy ſeule $x^3 = \pm axx \pm bx \pm c$. On trouvera par la même methode qu'il y a 54 formules dans le quatriéme degré, dont il y en a 8 purement negatives ; qu'il y a 162 formules dans le cinquiéme degré ; 486 dans la ſixiéme, & ainſi de ſuite. Dans le premier degré $x = + a$, & $x = - a$. Il y a deux formules une poſitive, & une negative : dans le ſecond il y a 6 formules 4 poſitives, & deux negatives ; d'où je tire ce Theoreme général ſur le nombre des formules.

Soient les deux progreſſions Geometriques.

2. 6. 18. 54. 162. 486. &c.
1. 2. 4. 8. 16. 32. &c.
differences 1. 4. 14. 46. 146. 454. &c.

La

La premiere progression 2. 6. 18. 54. &c. marque le nombre des formules, tant positives que negatives de chaque degré. Ainsi pour avoir le nombre des formules du septiéme degré, je prens le double de la sixiéme puissance de 3 qui est 729 & 1458 est le nombre des formules.

La seconde progression Geometrique 1. 2. 4. 8. &c. marque le nombre des formules negatives de chaque degré. Ainsi pour avoir le nombre des formules du septiéme degré, je prens la sixiéme puissance de 2 qui est 64. & c'est le nombre des formules purement negatives.

Enfin la suite des differences de ces deux progressions 1. 4. 14. 46. 146. &c. marque le nombre des formules positives de chaque degré, & il n'y a proprement que celles-cy dont on ait besoin.

Toutes les équations du troisiéme degré ont trois racines: toutes celles du quatriéme en ont quatre: celles du cinquiéme en ont 5 : & ainsi de suite. Ces racines sont réelles ou imaginaires, positives ou negatives, rationelles ou irrationelles.

Chaque formule a sa methode parti-

culiere, qui eſt certainement & demonſtrativement la plus courte. Ainſi toutes les autres methodes doivent être rejettées; c'eſt ce que j'eſpere de faire voir dans mon Traité DU CALCUL DU CALCUL. Ces methodes particulieres ne ſont pas ſi aiſées à enſeigner ni à retenir que les methodes générales, mais elles ſont incomparablement plus utiles & plus commodes dans la pratique. Il n'y a perſonne qui n'aime mieux arriver par un ſentier d'un quart de lieuë, que par un grand chemin de pluſieurs lieuës, ſur tout lors que l'on court beaucoup plus de riſque de s'égarer dans celui-cy.

Dans la premiere formule $x^3 = b$, il n'y a qu'une racine réelle & poſitive $x = \sqrt[3]{b}$. Si $x^3 = 8$ on aura $x = 2$; ſi $x^3 = 1000$ on aura $x = 10$; les deux autres racines ſont imaginaires, & voicy comment on les trouve, puiſque lorſque $x^3 = 1000$ on a $x = 10$. Il eſt évident par tranſpoſition que $x^3 - 1000 = 0$, & $x - 10 = 0$; or diviſant 0, par 0, le quotient eſt 0, donc diviſant $x^3 - 1000$ par $x - 10$, le quotient doit être égal à zero. Ce quotient eſt $xx + 10x + 100$. donc $xx + 10x + 100 = 0$, & par tranſpoſition $xx = -10x - 100$. c'eſt la

quatriéme formule du ſecond degré, dont les racines ſont $x = -5 + \sqrt{-75}$, & $x = -5 - \sqrt{-75}$. Ainſi les trois racines de l'équation $x^3 = 1000$ ſont $10, -5 + \sqrt{-75}$ & $-5 - \sqrt{-75}$. Les trois racines de $x^3 = 8$ ſont $2, -1 + \sqrt{-3}$ & $-1 - \sqrt{-3}$. & univerſellement ſoit $x^3 = 8b^3$, les trois racines ſeront $2b, -b + \sqrt{-3bb}$ & $-b - \sqrt{-3bb}$; il n'y a que la premiere de ces trois racines qui ſoit d'uſage.

Dans la ſeconde formule $x^3 = -b$, il y a une racine réelle negative $x = -\sqrt[3]{b}$, comme ſi $x^3 = -8$ on aura $x = -2$; car -2 par -2 produit $+4$, & $+4$ par -2 produit -8. Les deux autres racines ſont imaginaires & ſemblables à celles de la formule precedente. Soit univerſellement $x^3 = -8b^3$, les trois racines ſeront $-2b, +b + \sqrt{-3bb}$ & $+b - \sqrt{-3bb}$.

Dans la troiſiéme formule $x^3 = ax + b$, il n'y a qu'une racine réelle & poſitive $x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}b + \sqrt{\frac{1}{4}bb - \frac{1}{27}a^3}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}b - \sqrt{\frac{1}{4}bb - \frac{1}{27}a^3}}$, ce qui s'exprime de cette maniere.

1°. Prenez la moitié de l'abſolu & le quarrez c'eſt $\frac{1}{4}bb$.

2°. Prenez le tiers du nombre des racines & le cubez, c'est $\frac{1}{27}a^3$.

3°. Otez ce cube de ce quarré, & tirez la racine quarrée du reste, c'est $\sqrt{\frac{1}{4}bb - \frac{1}{27}a^3}$.

4°. Ajoûtez & ôtez cette racine de la moitié de l'absolu, c'est $\frac{1}{2}b + \sqrt{\frac{1}{4}bb - \frac{1}{27}a^3}$ & $\frac{1}{2}b - \sqrt{\frac{1}{4}bb - \frac{1}{27}a^3}$.

5°. Tirez la racine cubique de cette somme & de ce reste, la somme de ces deux racines donnera la racine cherchée.

Pour éviter les fractions il faut faire en sorte que *b* soit pair ou divisible par 2, & que *a* soit divisible par 3.

On voit facilement si *b* est pair par son dernier chifre qui doit être 0, 2, 4, 6 ou 8.

On voit aussi facilement si *a* est divisible par 3 en ajoûtant ses chifres, comme dans la preuve de 9; & retranchant 3 de toutes les sommes, comme on retranche 9. il faut qu'il ne reste rien.

Il y a trois cas de preparation. 1°. Si *b* étant impair, *a* est divisible par 3. 2°. Si *a* n'étant pas divisible par 3, *b* est pair. 3°. Si *b* est impair & que *a* ne soit pas divisible par 3.

Dans le premier cas il faut multiplier *a* par 4, & *b* par 8. & operer ensuite

comme cy-dessus. La moitié de la racine sera la racine cherchée. Par exemple soit l'équation $x^3 = 18x + 35$. Je suppose $y^3 = 72y + 280$, je trouve $y = 10$, donc $x = 5$.

Dans le second cas il faut multiplier a par 9, & b par 27. ou ce qui est plus commode par $30 - 3$. On opere ensuite suivant la formule, & le tiers de la racine est la racine cherchée.

Par exemple soit l'équation $x^3 = 8x + 168$ ou 168.

9	27	30 — 3
72.	1176	5040
	336	—504
	4536	4536.

Je suppose $y^3 = 72y + 4536$.

Je trouve $y = \sqrt[3]{2268 + \sqrt{5130000}} + \sqrt[3]{2268 - \sqrt{5130000}}$, & par une Regle que je donneray dans la suite, je trouve $y = 18$, donc $x = 6$ nombre cherché.

Dans le troisiéme cas il faut multiplier a par 36, & b par 216, & operer suivant la formule. La sixiéme partie de la racine sera la racine cherchée.

Par exemple soit l'équation $x^3 = 8x$

$+ 85$. je multiplie 8 par 36, & 85 par 216. & je suppose $y^3 = 288y + 18360$. je trouve $y = 30$; & par consequent $x = 5$. Dans ces deux derniers cas la valeur d'y quoique rationelle vient toûjours sous une forme irrationelle

Si l'on ne veut pas s'embarasser des trois cas, la preparation du dernier suffit pour tous, mais on n'aura pas les plus petits nombres possibles.

Pour démontrer cette preparation, il n'y a qu'à supposer dans le premier cas $x = \frac{1}{2}y$; dans le second $x = \frac{1}{3}y$; dans le troisiéme $x = \frac{1}{6}y$. Car en substituant ces valeurs dans les équations d'x, on trouvera les équations transformées & preparées par y.

Premier Exemple.

Soit l'équation proposée $x^3 = 72x + 280$.

1°. Je prens la moitié de 280. c'est 140, que je quarre, c'est 19600.

2°. Je prens le tiers de 72 c'est 24, que je cube; c'est 13824.

3°. J'ôte 13824 de 19600, il reste 5776. dont je tire la racine quarrée, c'est 76.

4°. J'ajoûte 76 à 140. c'est 216, &

j'ôte 76 de 140, il reste 64.

5°. Je tire la racine cubique de 216 & de 64. c'est 6 & 4. La somme 6 + 4 = 10 est la racine cherchée.

$$x^3 = 72x + 280$$

Preuve 1000 = 720 + 280
280

1000.

Second Exemple.

Soit l'équation $x^3 = 12x + 16$.

1°. La moitié de 16 est 8, dont le quarré est 64.

2°. Le tiers de 12 est 4, dont le cube est 64.

3°. L'excez de ce quarré sur ce cube est 0, dont la racine est 0.

4°. Ainsi la racine cherchée est $\sqrt{3}\,8 + 0.\sqrt{3}\,8 - 0$. c'est à dire $x = 2 + 2 = 4$ & généralement dans tous les cas semblables où $\frac{1}{4}bb = \frac{1}{27}a^3$, $x = 2\sqrt{\frac{1}{3}a}$ & $x = \sqrt{3}\frac{1}{2}b$.

Troisiéme Exemple.

Soit l'équation proposée $x^3 = 18x + 30$. on trouvera $x = \sqrt{3}\,18 + \sqrt{3}\,12$.

Quatriéme Exemple.

Soit l'équation proposée $x^3 = 6x + 16$. on trouvera $x = \sqrt[3]{8 + \sqrt{56}} + \sqrt[3]{8 - \sqrt{56}}$.

Cinquiéme Exemple.

Soit l'équation proposée $x^3 = 60x + 400$. on trouvera $x = \sqrt[3]{200 + \sqrt{32000}} + \sqrt[3]{200 - \sqrt{32000}}$. Cependant la racine cherchée est 10, car si on substitue 10 à la place d'x, on aura $1000 = 600 + 400$. Il semble que la formule soit trompeuse; mais elle ne l'est point. Car $\sqrt[3]{200 + \sqrt{32000}} = 5 + \sqrt{5}$, & $\sqrt[3]{200 - \sqrt{32000}} = 5 - \sqrt{5}$. Or $5 + \sqrt{5} + 5 - \sqrt{5} = 10$. parce que les deux parties irrationelles $+ \sqrt{5}$ & $- \sqrt{5}$ se détruisent.

La difficulté est de trouver cette racine rationelle, que la formule donne deguisée sous la forme d'un binome cubique irrationel. Ce qui n'arrive pas dans les formules du second degré où les racines rationelles viennent toûjours sous une forme rationelle. Cet inconvenient dans les formules du troisiéme degré, est

d'autant plus grand que les racines viennent bien plus ſouvent ſous une forme irrationelle, que ſous une forme rationelle. 10 par exemple peut être la racine de 99 équations

$$x^3 = 1x + 990$$
$$x^3 = 2x + 980$$
&c. &c.
$$x^3 = 99x + 10.$$

De ces 99 équations il n'y en a que 5 qui viennent ſous une forme rationelle.

$$x^3 = 27x + 730$$
$$x^3 = 48x + 520$$
$$x^3 = 63x + 370$$
$$x^3 = 72x + 280$$
$$x^3 = 75x + 250$$

Qui viennent ſous cette forme,

$$x = 9 + 1$$
$$x = 8 + 2$$
$$x = 7 + 3$$
$$x = 6 + 4$$
$$x = 5 + 5.$$

Et le nombre 7 qui peut être la racine de 48 équations, ne peut venir que ſous trois formes rationelles.

$$x = 6 + 1$$
$$x = 5 + 2$$
$$x = 4 + 3.$$

En ſorte que généralement les formules ne donnent des valeurs ſous une for-

me rationelle, qu'autant que la moitié de la racine a d'unitez en entiers. Voicy une Regle nouvelle & générale pour trouver ces valeurs rationelles deguisées sous une forme irrationelle; & pour trouver le nombre entier qui en approche le plus, lorsque la racine est irrationelle.

Regle nouvelle & générale pour la resolution des mêmes Equations.

1°. Tirez la racine quarrée approchée de la partie irrationelle du binome.

2°. Ajoûtez cette racine à la partie rationelle, & ôtez en cette même racine augmentée de l'unité.

3°. Tirez la racine cubique de la somme & de la difference, la somme de ces deux racines augmentée de l'unité sera toûjours la veritable racine si elle est rationelle, ou la racine approchée si elle est irrationelle.

Ainsi dans l'exemple cy-dessus $x^3 = 60x + 400$, la racine vient sous cette forme $x = \sqrt[3]{200 + \sqrt{32000}} + \sqrt[3]{200 - \sqrt{32000}}$. Pour l'avoir sous une forme rationelle, je prens le tiers de 60. qui est 20, que je cube; c'est

8000. & la moitié de 400, qui est 200 que je quarre; c'est 40000. J'ôte 8000 de 40000. il reste 32000, dont je tire la racine approchée en dessous, c'est 178 que j'ajoûte à 200. c'est 378. J'ôte 179 de 200. il reste 21.

La racine cubique approchée de 378 est 7. celle de 21 est 2, dont la somme $7 + 2 = 9$ étant augmentée d'une unité donne 10 racine cherchée.

Demonstration.

La veritable racine est $\sqrt[3]{200 + \sqrt{32000}} + \sqrt[3]{200 - \sqrt{32000}}$. Or par la construction $\sqrt[3]{200 + \sqrt{32000}}$, est plus grande que $\sqrt[3]{378}$ & plus petite que $\sqrt[3]{379}$. & par la même construction $\sqrt[3]{200 - \sqrt{32000}}$ est plus grande que $\sqrt[3]{21}$, & plus petite que $\sqrt[3]{22}$. donc en prenant la racine cubique approchée de 378, qui est 7. Il est évident que la valeur de $\sqrt[3]{200 + \sqrt{32000}}$. est entre 7 & 8. & en prenant la racine cubique approchée de 21, qui est 2. Il est évident que la racine cubique de $\overline{200 - \sqrt{32000}}$ est entre 2 & 3. donc la veritable valeur de la racine cherchée sera entre $8 + 3 = 11$, & $7 + 2 = 9$. donc cet-

te valeur eſt 10, où il n'y a point de valeur rationelle. Car s'il n'y en a point en nombres entiers, il n'y en a point en fractions.

Pour s'aſſurer ſi 10 eſt la racine cherchée, il faut ſubſtituer 10 à la place d'x, & ſi les deux membres de l'équation ſont égaux, 10 eſt la racine cherchée, autrement c'eſt une valeur approchée; & il eſt aiſé d'approcher à l'infini ou en ajoûtant des tranches de deux zero au ſecond terme, & des tranches de trois zero au troiſiéme terme, ou en ſe ſervant des formules d'approximation, &c. On pourra même s'épargner en pluſieurs cas la ſubſtitution, & être aſſuré que la racine eſt irrationelle par cette Regle.

La racine cherchée doit être un nombre pair, lorſque les deux abſolus a & b ſont tous deux pairs. Car ſi a eſt pair il eſt évident que ax ſera pair, & par conſequent $ax + b = x^3$ le cube x^3 ſera pair. Or par la preparation b eſt toûjours pair; ainſi la racine devant être un nombre pair, ſi l'on trouve pour valeur un nombre impair, on eſt aſſuré que la racine eſt irrationelle; & que la valeur n'eſt qu'approchée.

Sixiéme Exemple.

Soit l'équatiom $x^3 = 90x + 100$.

1°. Le tiers de 90 est 30, dont le cube est 27000.

2°. La moitié de 100 est 50, dont le quarré est 2500.

3°. J'ôte 27000 de 2500. il reste -24500. dont la racine quarrée est imaginaire, savoir $\sqrt{-24500}$.

4°. J'ajoûte & j'ôte cette racine imaginaire de 50. j'ay $50 + \sqrt{-24500}$, & $50 - \sqrt{-24500}$. La racine cherchée vient sous cette forme irrationelle & imaginaire $\sqrt[3]{50 + \sqrt{-24500}} + \sqrt[3]{50 - \sqrt{-24500}}$. Cependant sa valeur est 10. Ce cas où le cube du tiers d'a est plus grand que le quart du quarré de b s'appelle le cas irreductible, à cause de ces racines imaginaires. Tous les Algebristes depuis cent cinquante ans ont travaillé inutilement à le resoudre, & cette question n'est pas moins celebre parmi eux que la quadrature du Cercle l'est parmi les Geometres.

De même que dans l'exemple precedent, la valeur qui vient sous une forme irrationelle, ne laisse pas d'être la veritable racine rationelle, parce qu'il y a

deux nombres irrationaux égaux avec des signes contraires ; & qui se détruisent $\overline{5+\sqrt{5}} + \overline{5-\sqrt{5}} = 10$.

De même aussi dans l'exemple dont il s'agit, & dans tous les cas semblables, il y a deux nombres imaginaires égaux avec deux signes contraires, joints à des nombres réels. Ainsi dans la somme les imaginaines se détruisent. Car $\sqrt[3]{50+\sqrt{-24500}} = 5+\sqrt{-5}$, & $\sqrt[3]{50-\sqrt{-24500}} = 5-\sqrt{-5}$. Or $\overline{5+\sqrt{-5}} + \overline{5-\sqrt{-5}} = 10$. Ce nombre imaginaire peut être un quarré parfait, comme si l'équation étoit $x^3 = 15x + 4$, on trouveroit $x = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} = \sqrt[3]{2 + - 11} + \sqrt[3]{2 - - 11}$. La racine cubique de $2 + - 11$ est $2 + - 1$, & celle de $2 - - 11$ est $2 - - 1$: par consequent la racine cherchée est $\overline{2 + - 1} + \overline{2 - - 1} = 4$.

Operation.

2 + — 1
par 2 + — 1

produit 4 + — 2
— 1 + — 2

3 + — 4 quarré
par 2 + — 1

6 + — 8
— 4 + — 3

2 + — 11 cube.

Il eſt aiſé de voir par cet exemple comment on opere ſur les imaginaires entre eux, & ſur les imaginaires mêlez avec des nombres réels ou des nombres mixtes. Si l'on multiplie nombre réel par nombre imaginaire, le produit eſt imaginaire; & le ſigne exterieur ſuit la Regle ordinaire. Mais lors qu'on multiplie imaginaire par imaginaire du premier ou du ſecond degré.

+ — par + — produit — réel.
— — par — — produit — réel.
+ — par — — produit + réel.

Il y a precisément le quart en entiers des équations de cette formule qui renferment des imaginaires. Comme si la racine est 10. des 99 équations $x^3 = 1x + 990$, $x^3 = 2x + 980$, $x^3 = 3x + 970$, &c. $x^3 = 99x + 10$, il y en a cinq qui viennent sous une forme rationelle, 70 sous une forme irrationelle réelle, & 24 sous une forme irrationelle imaginaire; savoir $x^3 = 76x + 240$, $x^3 = 77x + 230$. &c. $x^3 = 99x + 10$. & si la racine est 7. des 48 équations $x^3 = 1x + 336$, $x^3 = 2x + 329$, &c. $x^3 = 48x + 7$. Il y en a trois qui viennent sous une forme rationelle, 33 sous une forme irrationelle & réelle, & 12 sous une forme irrationelle imaginaire; savoir $x^3 = 37x + 84$, $x^3 = 38x + 77$, &c. $x^3 = 48x + 7$. Or 24 est le quart en entiers de 99; & 12 est le quart de 48.

Si l'on avoit une methode pour trouver en nombres entiers la valeur exacte ou approchée de ces dernieres formules, il ne nous manqueroit rien pour la resolution parfaite de ces équations $x^3 = ax + b$. La formule $x^3 = ax - b$ dépend toute entiere du cas irreductible. De même que la trissection de l'angle, la construction de l'heptagone & de l'en-

neagone

neagone regulier, & une grande partie des équations du quatriéme degré. Voicy ce que j'ay trouvé là dessus.

Methode nouvelle pour le cas irreductible.

Soit l'équation $x^3 = ax + b$, & $\frac{1}{27} a^3$ plus grande que $\frac{1}{4} bb$. Dans ce cas c'est le nombre a qui predomine, & sur lequel il faut se regler, parce qu'il peut être indefiniment grand, & qu'il a un terme fixe de petitesse, au lieu que b peut être indefiniment petit, & il a un terme fixe de grandeur; c'est pourquoy negligeant d'abord le terme b. J'ay $x^3 = ax$ & $x = \sqrt{a}$. Mais cette valeur est trop petite, car x^3 n'est pas seulement égal à ax, mais à $ax + b$. Je suppose donc $x = \sqrt{a} + y$, ou pour une plus grande facilité du calcul, je suppose $x^3 = aax + b$, & $x = a + y$, donc $x^3 = a^3 + 3aay + 3ayy + y^3 = a^3 + aay + b$, & $3ayy + 2aay + y^3 = b$. negligeant y^3, je resous l'équation du second degré $3ayy + 2aay = b$, & je trouve $y = -\frac{1}{3} a + \sqrt{\frac{1}{9} aa + \frac{b}{3a}}$; & par consequent $x = \frac{2}{3} a + \sqrt{\frac{1}{9} aa + \frac{b}{3a}}$.

& c'eſt une racine approchée de l'équation propoſée ; elle eſt un peu trop grande, parce que ce n'eſt pas ſeulement $3ayy + 2aay$, qui eſt égal à b, mais $3ayy + 2aay + y^3$. La racine exacte eſt $x = \frac{2}{3}a + \sqrt{\frac{1}{9}aa + \frac{b - y^3}{3a}}$, & ſi l'on ſubſtitue à la place d'y la valeur $y = -\frac{1}{3}a + \sqrt{\frac{1}{9}aa + \frac{b}{3a}}$, on aura une ſeconde racine approchée un peu trop petite, mais beaucoup plus approchée que la premiere ; & on pourra continuer ſur la même formule à l'infini. La premiere racine eſt aſſez ſimple, & l'erreur eſt toûjours moindre que l'unité, lors que le nombre b eſt plus petit que 3684365. ce qui ſuffit pour la pratique.

Soit l'équation $x^3 = 7569\ x + 240903$. $aa = 7569$; $a = 87$ & $b = 240903$. donc $x = \frac{2}{3}a + \sqrt{\frac{1}{9}aa + \frac{b}{3a}} = 58 + \sqrt{1764} = 100$. 100 eſt la racine approchée à moins d'une unité prés. Par la ſeconde formule je trouve $x = 58 + \sqrt{1755\frac{152}{261}}$, qui approche encore beaucoup plus prés, &c.

Il n'y a point d'équation dans le cas irreductible, dont on ne trouve la racine par cette methode auſſi exactement qu'il eſt poſſible.

Soit encore l'équation dans le cas irreductible $x^3 = 3aax + 2b^3$. Je suppose $x = \overline{z + -y} + \overline{z - -y} = 2z$, le cube du nombre imaginaire mixte $z + -y$, qui est $z^3 - 3yyz + -3yzz - -y^3$ est égal au binome imaginaire mixte $b^3 + \sqrt{-a^6 - b^6}$, & égalant le réel au réel, & l'imaginaire à l'imaginaire. J'ay les deux équations $z^3 - 3yyz = b^3$, & $3zzy - y^3 = \sqrt{a^6 - b^6} = c^3$ & $zz = \frac{c^3 + y^3}{3y}$; donc si je puis connoître l'imaginaire y. Je connoîtray z & $x = 2z = \sqrt{\frac{4c^3 + 4y^3}{3y}}$, je substitue cette valeur dans l'équation $x^3 = 3aax + 2b^3$, & dans l'équation $z^3 - 3yyz = b^3$, je trouve deux équations pour y qui rendent le Probleme plus que déterminé; & divisant l'une par l'autre, j'en trouve une troisiéme plus simple, &c. Mais comme le calcul est immense & rebuttant je me contente de l'indiquer.

Toutes les fois que l'équation $y^3 = ay - b$, a une racine rationelle, l'équation $x^3 = ax + b$ a une racine rationelle ou irrationelle du second degré. Par exem. soit l'équation $x^3 = 7x + 6$. parce que l'équation $y^3 = 7y - 6$, a pour racine 1. Si l'on divise l'équation $x^3 - 7x$

$- 6. = 0$ par $x + 1 = 0$. Le quotient $xx - 1x - 6 = 0$ ou $xx = 6 + 1x$ donne $x = 3$ racine cherchée.

Soit encore l'équation $x^3 = 40x + 24$. parce que l'équation $y^3 = 40y - 24$. a pour racine le nombre 6. Si l'on divise $x^3 - 40x - 24$ par $x + 6$. le quotient $xx - 6x - 4 = 0$ ou $xx = 6x + 4$ donne $x = 3 + \sqrt{13}$ racine cherchée.

Il y a donc huit especes de racines positives & réelles dans la formule $x^3 = ax + b$.

1°. Rationelle $x^3 = 27x + 730 x = 9 + 1 = 10$.

2°. Rationelle en effet, mais irrationelle réelle en apparence, comme $x^3 = 3x + 970 \ldots x = \sqrt[3]{485 + \sqrt{235224}} + \sqrt[3]{485 - \sqrt{235224}} = 5 + \sqrt{24} + 5 - \sqrt{24} = 10$.

3°. Rationelle en effet, mais irrationelle imaginaire du premier degré en apparence, comme $x^3 = 78x + 220 \ldots x = \sqrt[3]{110 + -74} + \sqrt[3]{110 - -74} = 5 + -1 + 5 - -1 = 10$.

4°. Rationelle en effet, mais irrationelle imaginaire du second degré en apparence, comme $x^3 = 81x + 190$, $x = \sqrt[3]{95 + \sqrt{-10658}} + \sqrt[3]{95 -}$

$\sqrt{-10658} = 5 + \sqrt{-2} + 5 - \sqrt{-2} = 10$.

5°. Irrationelle du second degré, comme $x^3 = 40x + 24 .. x = 3 + \sqrt{13}$.

6°. Irrationelle simple du troisiéme degré $x^3 = 18x + 30 .. x = \sqrt[3]{18} + \sqrt[3]{12}$.

7°. Irrationelle complexe du troisiéme degré, comme $x^3 = 6x + 10 .. x = \sqrt[3]{5 + \sqrt{17}} + \sqrt[3]{5 - \sqrt{17}}$.

8°. Irrationelle complexe du troisiéme degré, mais imaginaire irreductible en apparence, comme $x^3 = 6x + 2 .. x = \sqrt[3]{1 + \sqrt{-7}} + \sqrt[3]{1 - \sqrt{-7}}$.

Le calcul seul démontre que dans la formule $x^3 = ax + b$, il n'y a qu'une seule racine réelle & positive, qui est $\sqrt[3]{\frac{1}{2}b + \sqrt{\frac{1}{4}bb - \frac{1}{27}a^3}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}b - \sqrt{\frac{1}{4}bb - \frac{1}{27}a^3}}$. Les deux autres racines sont negatives & réelles dans le cas irreductible; elles sont negatives & imaginaires dans les autres cas. Par exemple dans l'équation $x^3 = 14x + 8$, la racine positive est 4. on trouvera les deux racines negatives en divisant $x^3 - 14x - 8 = 0$ par $x - 4 = 0$, le quotient $xx + 4x + 2 = 0$ ou $xx = -4x - 2$ donne les deux racines negatives $-2 + \sqrt{2}$ & $-2 - \sqrt{2}$. Mais

dans l'équation $x^3 = 10x + 24$. où la racine réelle & positive est encore 4. les deux racines sont negatives & imaginaires $-2 + \sqrt{-2}$ & $-2 - \sqrt{-2}$.

Il ne me reste plus qu'à montrer comment on a pu trouver la formule de la racine.

Soit l'équation $x^3 = aax + b^3$. Pour resoudre l'équation du second degré $xx = ax + b^2$, il n'y a qu'à supposer $x = y + \frac{a}{2}$, d'où je conclus par analogie que dans l'équation du troisiéme degré, je dois supposer $x = y + \frac{aa}{3y}$. La substitution me donne $y^3 + aay + \frac{a^4}{3y} + \frac{a^6}{27y^3} = aay + \frac{a^4}{3y} + b^3$ ou $y^3 + \frac{a^6}{27y^3} = b^3$; & $27y^6 + a^6 = 27y^3b^3$, qui est une équation derivée du second degré, & supposant $y^3 = z$. J'ay $27zz + a^6 = 27b^3z$, & $z = \frac{1}{2}b^3 + \sqrt{\frac{1}{4}b^6 - \frac{1}{27}a^6}$, donc $y = \sqrt[3]{\frac{1}{2}b^3 + \sqrt{\frac{1}{4}b^6 - \frac{1}{27}a^6}}$, & $x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}b^3}$ &c. ce qu'il falloit trouver.

Ou bien je suppose $x = z + y$, la substitution donne $z^3 + 3yzz + 3yyz + y^3 = aaz + aay + b^3$. Comme j'ay deux

inconnuës & une seule équation, j'en puis former deux arbitrairement. Je suppose $z^3 + y^3 = b^3$ & $3yyz + 3yzz = aay + aaz$, divisant cette derniere équation par $z + y$, je trouve $3yz = aa$; & par consequent $z = \frac{aa}{3y}$ & $x = y + \frac{aa}{3y}$, comme cy-dessus, &c.

C'est Tartalea & non pas Cardan qui a trouvé le premier cette formule pour la racine des équations du troisiéme degré.

Methode nouvelle pour la resolution de la formule $x^3 = ax - b$.

Cette formule a trois racines, deux positives & une negative. Les deux racines positives sont réelles, lorsque $\frac{1}{4}bb$ est plus petit que $\frac{1}{27}a^3$. Ces deux racines sont égales entre elles, lorsque $\frac{1}{4}bb = \frac{1}{27}a^3$; enfin ces deux racines sont imaginaires, lorsque $\frac{1}{4}bb$ est plus grand que $\frac{1}{27}a^3$; la racine negative est toûjours réelle & égale à la somme des deux racines positives. Ces trois racines sont semblables à celles de la formule precedente $x^3 = ax + b$; mais les deux racines negatives de celle-cy sont les deux racines positives de celle-là, & au

contraire la racine positive de $x^3 = ax + b$ est la racine negative de $x^3 = ax - b$. Pour resoudre l'équation $x^3 = ax - b$, voicy ma methode.

1°. Je tire la racine quarrée d'a, dont je prens les deux tiers.

2°. Je divise b par $3a$, & j'ajoûte le quotient à $\frac{1}{9}a$.

3°. Je tire la racine quarrée de cette somme, que j'ajoûte aux deux tiers de la racine d'a. La somme donne la racine approchée & negative de l'équation proposée, que si l'on veut avoir une seconde racine negative plus approchée, on ôtera $\sqrt{a}$ de cette même racine, soit le reste y, au lieu de diviser b par $3a$, on divisera $b - y^3$ par $3a$; & on trouvera de même des troisiémes, des quatriémes &c. racines approchées à l'infini.

La racine negative trouvée soit appellée z. Les deux racines positives cherchées de l'équation $x^3 = ax - b$ seront $\frac{1}{2}z \pm \sqrt{a - \frac{3}{4}zz}$.

Exemple.

Soit l'équation proposée $x^3 = 7569x - 240903$.

1°. Je tire la racine quarrée de 7569. c'est 87. dont je prens les deux tiers; c'est 58. 2°. Je

2°. Je divise 240903 par 261, triple de 87. le quotient est 923, que j'ajoûte à la neuviéme partie de 7569, c'est à dire à 841.

3°. Je tire la racine quarrée de 841 + 923 = 1764 c'est 42. que j'ajoûte à 58, la somme — 100 est la premiere racine negative & approchée par excez.

Pour avoir la seconde, j'ôte 87 de 100. il reste 13, dont le cube est 2197. au lieu de diviser 240903 par 261, je divise seulement 240903 — 2197, ou ce qui est plus commode, je divise 2197 par 261; & j'ôte le quotient $8\frac{109}{261}$ de 1764, le reste est $1755\frac{152}{261}$. La seconde racine negative approchée par défaut est $58 + \sqrt{1755\frac{152}{261}}$, qui est plus grande que $99\frac{89}{100}$. Ainsi la racine negative de l'équation $x^3 = 7569x - 240903$ est plus grande que $99\frac{89}{100}$, & plus petite que 100.

Pour avoir les deux racines positives de la même équation.

1°. Je prens la moitié de 100 c'est 50. que je quarre c'est 2500, & que je triple c'est 7500.

2°. J'ôte 7500 de 7569, il reste 69. dont la racine quarrée est $\sqrt{69}$ ou $8\frac{5}{16}$ à peu prés.

3°. Les deux racines positives approchées sont $50 + \sqrt{69}$, & $50 - \sqrt{69}$ ou $58 \frac{5}{16}$ & $41 \frac{11}{16}$.

Second Exemple.

Soit l'équation $x^3 = 84x - 160$.

Je tire la racine quarrée de 84, c'est $9 \frac{3}{18}$ à peu prés, dont les deux tiers sont $6 \frac{2}{18}$, ou $6 \frac{1}{9}$.

Je divise 160 par 3 fois $9 \frac{3}{18}$, c'est à dire par $27 \frac{1}{2}$, ou multipliant tout par 2, je divise 320 par 55, le quotient est $5 \frac{9}{11}$, que j'ajoûte à la neuviéme partie de 84; c'est à dire à $9 \frac{1}{3}$, la somme est $15 \frac{5}{33}$, dont la racine approchée est 4 que j'ajoûte à $6 \frac{1}{9}$. la somme en entiers 10 est la racine negative cherchée. Car en substituant -10 dans l'équation proposée je trouve $-1000 = -840 - 160$. Pour éviter les fractions lorsque l'absolu du second terme n'est pas un quarré parfait, on peut ajoûter deux zero au second terme & trois au dernier. Ainsi supposant $x^3 = 8400x - 160000$. Je tire la racine approchée par excez de 8400 c'est 92. dont les deux tiers par excez sont 62.

Je divise 160000 par 3 fois 91, ou par 273, le quotient approché par excez

est 587. que j'ajoûte à la neuviéme partie en entiers & par excez de 8400; c'est à dire à 934. la racine quarrée de la somme 1521 est 39. que j'ajoûte à 62. & de la somme 101 retranchant la derniere figure, je dis que 10 est la racine negative exacte ou approchée; & je reconnois par la substitution qu'elle est exacte. Et suivant la formule $\frac{1}{2}z + \sqrt{a - \frac{3}{4}zz}$, je trouve les deux racines positives $5 \pm \sqrt{84 - 75} = 5 \pm \sqrt{9} = 5 \pm 3 = 8 = 2$.

On peut resoudre cette formule par les Tables des Sinus. Prenez 1°. $\sqrt{\frac{1}{3}a}$ pour sinus total. 2°. $\frac{3b}{2a}$ pour Sinus. 3°. Faites une Regle de trois, dont le premier terme soit le sinus total des Tables, & le second & le troisiéme soient $\sqrt{\frac{1}{3}a}$ & $\frac{3b}{2a}$. 4°. Aprés avoir cherché le quatriéme terme proportionnel c dans les Tables des Sinus & l'Arc qui luy répond, prenez le double du Sinus de l'Arc sous-triple d; & faites encore une Regle de trois, dont le premier terme est le Sinus total des Tables, le second terme & le troisiéme sont d, & $\sqrt{\frac{1}{3}a}$ le quatriéme terme est la petite valeur d'x.

5°. Prenez le Sinus e du complement

de l'arc du Sinus d à l'Arc de 60 degrez.

6°. Faites comme le Sinus total eſt au Sinus e. Ainſi $\sqrt{\frac{1}{3}a}$ à un quatriéme, ce quatriéme nombre ſera la grande valeur d'x.

7°. La ſomme des deux valeurs donnera la valeur negative.

Exemple.

Soit l'équation $x^3 = 300x - 1000$.

$\sqrt{\frac{1}{3}a} = 10 \frac{3b}{2a} = 5$.

10. 5 : 10000. 50000 Sinus de 30 degrez.

Le Sinus de 10 degrez eſt 17365, dont le double eſt 34730. Or 100000. 34730 : 10. $3 \frac{473}{1000}$ petite valeur d'x approchée.

J'ôte 10 degrez de 60. il reſte 50d ſon Sinus eſt 76604. dont le double eſt 153208. Or 100000. 153208 : 10. $15 \frac{3208}{100000}$ grande valeur d'x.

Cette methode eſt fondée ſur ce que le Sinus total étant a, la corde d'un arc quelconque étant b, & la corde de l'arc ſouſtriple étant x, on trouve que $x^3 = 3aax - aab$.

Cette methode paroît d'abord aſſez ingenieuſe ; mais outre qu'elle eſt tres

longue, que c'eſt toûjours un défaut de ſe ſervir des Tables, lors qu'on s'en peut paſſer, & qu'il eſt contre l'ordre de ſuppoſer des Theoremes de Geometrie pour la reſolution des Problemes d'Algebre, il y a viſiblement une petition de principe dans le raiſonnement. Car pour reſoudre une équation on ſuppoſe des Tables qui n'ont pu être conſtruites qu'en reſolvant la même équation.

On pourroit reſoudre toutes ſortes d'équations par des Tables, mais afin qu'elle fuſſent commodes, il faudroit qu'il n'y eut qu'une Regle de trois à faire, & point d'extraction de racines. Pour cela il faudroit rendre les équations completes, & prendre pour premier terme fixe, & qui répondroit au ſinus total, le quotient du ſecond terme diviſé par l'expoſant de la puiſſance, &c.

Dans la formule $x^3 = b - ax$, il n'y a qu'une racine réelle & poſitive, qui ne vient jamais ſous une forme imaginaire, ſa valeur eſt $x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}b + \sqrt{\frac{1}{4}bb + \frac{1}{27}a^3}} - \sqrt[3]{\frac{1}{2}b - \sqrt{\frac{1}{4}bb - \frac{1}{27}a^3}}$.

Soit l'équation propoſée $x^3 = 98 - 45x$.

1°. Je prens la moitié de 98, c'eſt

49. dont le quarré est 2401.

2°. Je prens le tiers de 45, c'est 15. que je cube, c'est 3375.

3°. J'ajoûte 2401 à 3375, & je tire la racine quarrée de la somme 5776, c'est 76.

4°. J'ajoûte 49. à 76, & j'ôte 49 de 76, la somme est 125, le reste est 27; les racines cubiques de cette somme & de ce reste sont 5 & 3, dont la difference 2, est la racine cherchée.

On trouvera les deux racines negatives par cette formule; soit la racine positive $2 = z$, les deux racines negatives seront $y = -\frac{1}{2}z \pm \sqrt{-a - \frac{3}{4}zz} = -1 \pm \sqrt{-48}$.

De la resolution des autres formules du troisiéme degré.

FAites évanoüir le second terme, & vous réduirez l'équation à une des formules precedentes.

Exemple.

Soit l'équation $x^3 = 7xx + 300$.

Supposez $x = \frac{300}{y}$, la substitution donne $y^3 = 90000 - 2100y$, & la

formule precedente donne $y = 30$, & par conſequent $x = \frac{300}{y} = 10$.

Second Exemple.

Soit l'équation $x^3 = 30xx + 20x + 341$.

Suppoſez $x = y + 10$ en prenant $10 =$ tiers de 30. nombre des xx. La ſubſtitution donne $y^3 = 320y + 29541$. Je trouve par les formules precedentes $y = 21$, & par conſequent $x = 31$.

Remarque.

Les Problemes plus que déterminez du troiſiéme degré ſe reſolvent de même que ceux du ſecond, & cela eſt géneral pour tous les degrez.

Il n'y a point de regle génerale pour reſoudre les Problemes indéterminez du troiſiéme degré. L'adreſſe conſiſte à former tellement le ſecond membre arbitraire de l'équation qu'il ne reſte que des x^3 & des xx, ou des xx & des x, ou enfin des x & des nombres, afin que le Probleme ſe réduiſe au premier degré, & qu'x ſoit rationelle.

EXEMPLE.

Trouver deux cubes, dont la ſomme ſoit égale à la difference de deux autres.

SOïent les deux cubes donnez 8 & 1. leur difference eſt 7. on demande deux cubes dont la ſomme ſoit 7.

Je ſuppoſe $8 = a^3$ & $1 = b^3$ ſoit l'un des côtez des cubes cherchez $a - x$, & l'autre $cx - b$. La ſomme des cubes eſt $a^3 - 3aax + 3axx - x^3 + c^3 x^3 - 3ccbxx + 3bbcx - b^3 = a^3 - b^3$, & cette équation étant preparée, je trouve

$$\begin{array}{l} c^3 x^3 + 3axx + 3bbcx \\ -1x^3 - 3cbbxx - 3aax = 0, \end{array}$$

& diviſant tout par x, j'ay

$$\begin{array}{l} c^3xx + 3ax + 3bbcx \\ -1xx - 3ccbx - 3aa = 0; \end{array}$$

& parce que c eſt indéterminé, je ſuppoſe $3bbc = 3aa$, afin que le dernier terme $\begin{array}{l} +3bbc \\ -3aa \end{array}$ s'évanoüiſſant.

il ne reſte que des xx & des x, donc $c = \frac{aa}{bb}$. Et ſubſtituant cette valeur je trouve $x = \frac{3a^4b^3 - 3ab^6}{a^6 - b^6} = \frac{2}{3}$. Les deux côtez des cubes cherchez ſont $\frac{5}{3}$ & $\frac{4}{3}$,

dont la somme de cubes est $\frac{189}{27} = 7$.

CHAPITRE IV.

De Problemes du quatriéme degré.

IL y a 54 formules, $x^4 = a^4$, $x^4 = -a^4$, $x^4 = ax + b$, $x^4 = ax - b$, &c. de ces 54 formules il y en a 8 purement negatives $x^4 = -a^4$, $x^4 = -ax - b$, $x^4 = -axx - b$, $x^4 = -axx - bx - c$, $x^4 = -ax^3 - bxx - c$, $x^4 = -ax^3 - bx - c$, $x^4 = -ax^3 - bxx - cx - d$. Qui ne different en rien pour l'expression des formules positives opposées, si ce n'est dans les signes + & —. Il y a outre cela trois formules $x^4 = axx + b$, $x^4 = axx - b$, $x^4 = b - axx$ qui sont du second degré, & l'équation simple $x^4 = a^4$, qui n'est que l'extraction simple & numerique de la racine quatriéme, de sorte qu'il n'y a proprement que 42 formules où l'on ait besoin de methode nouvelle pour les resoudre. Elles se peuvent toutes réduire à l'une de ces deux formules du troisiéme degré $x^3 = ax + b$, $x^3 = b - ax$. Par la Regle suivante qui est de Monsieur Descartes.

Soit l'équation quelconque $x^4 = \pm ax^3 \pm bx^2 \pm cx \pm d$. Je suppose $x = y \pm \frac{a}{4}$, & en substituant cette valeur je trouve une nouvelle équation du quatriéme degré où le second terme est évanoüi. $y^4 \pm fyy \pm gy \pm h = 0$, à la place de laquelle j'écris $z^6 \pm 2fz^4 + ffzz \mp 4hzz - gg = 0$. Cette derniere équation est du troisiéme degré, laquelle étant resoluë par les Regles du Chapitre precedent, il faut écrire de nouveau ces deux équations.

$$yy - zy + \tfrac{1}{2}zz = 0 \quad \& \quad yy + zy + \tfrac{1}{2}zz = 0$$
$$\pm \tfrac{1}{2}f \qquad\qquad \pm \tfrac{1}{2}f$$
$$\pm \frac{g}{zz} \qquad\qquad \mp \frac{g}{zz}$$

Ces deux équations du second degré étant resoluës donneront les quatre valeurs d'y, & par consequent les quatre valeurs d'x.

Exemple.

Soit l'équation proposée $y^4 - 17yy - 20y + 6 = 0$. Je suppose pour abbreger le second terme évanoüi.

Donc $17 = f$, $20 = g$, $6 = h$. donc suivant la formule $z^6 \pm 2fz^4$ &c. On aura $z^6 - 34z^4 + 313zz - 400 = 0$. Je trouve $zz = 16$ & $z = 4$; & sub-

ſtituant cette valeur dans les deux équations du ſecond degré $yy - zy + \frac{1}{2}zz$, &c. Je trouve $yy - 4y - 3 = 0$, & $yy + 4y + 2 = 0$, qui me donnent par les regles du Chapitre ſecond, ces quatre racines $2 + \sqrt{7}$, $2 - \sqrt{7}$, $-2 + \sqrt{2}$, $-2 - \sqrt{2}$.

On peut démontrer cette Regle de deux manieres. 1°. Par les effets *à poſteriori*, en ſubſtituant les formules univerſelles des racines dans la formule univerſelle de l'équation ; car les deux membres étant égaux, il eſt évident que les racines ſont juſtes ; on prouvera qu'il y en a quatre & pas davantage. Cette maniere eſt preſque impraticable dans le quatriéme degré, à cauſe de la longueur des formules. La ſeconde maniere de démontrer eſt beaucoup plus ſimple & plus élegante ; & elle eſt particuliere à l'Algebre. On démontre par les cauſes *à priori* pour parler dans les termes de l'Ecole.

Soit l'équation du quatriéme degré $x^4 - axx - bx - c = 0$, qu'il faille réduire au ſecond & au troiſiéme degré. Je ſuppoſe qu'elle eſt formée par la multiplication de ces deux-cy.

$$xx - yx - z = 0$$
$$xx + yx + t = 0$$

Le produit est $x^4 - yyxx - tyx - tz$
$$\begin{array}{l} - zxx - zyx = 0 \\ + txx \end{array}$$
d'où je tire ces trois équations $yy + z - t = a$; $ty + zy = b$; $tz = c$; donc $t = \frac{c}{z}$, & substituant cette valeur de t, dans la seconde équation, j'ay $\frac{cy}{z} + zy = b$, ou $zz = \frac{bz - cy}{y}$, & en la substituant dans la premiere j'ay $yy + z - \frac{c}{z} = a$ ou $zz = az + c - yyz = \frac{bz - cy}{y}$; & par consequent $z = \frac{2cy}{y^3 + b - ay}$, substituant cette valeur de z dans l'équation $t = \frac{c}{z}$ & dans l'équation $ty + zy = b$, je trouve
$$\begin{array}{l} y^6 - 2ay^4 + aayy - bb = 0. \\ \qquad\qquad + 4cyy \end{array}$$
conformément à la Regle, ce qu'il falloit démontrer.

Remarque.

Soit la formule universelle du troisiéme degré $x^3 = \pm axx \pm bcx \pm def = 0$. une des valeurs d'$x$ est $x = y + z$ & $y = \pm \frac{1}{3}a + \sqrt[3]{\pm \frac{1}{27}a^3 + \frac{1}{6}abc \pm \frac{1}{2}def}$

$+ \sqrt{\frac{1}{27}a^3def - \frac{1}{108}aabbcc \pm \frac{1}{6}abcdef + \frac{1}{4}def + \frac{1}{27}b^3c^3}$ &c. $z = \sqrt[3]{\pm \frac{1}{27}a^3 + \frac{1}{6}abc \pm \frac{1}{3}def - \sqrt{\frac{1}{27}a^3def - \frac{1}{108}aabbcc}}$, &c. Et les deux autres se trouveront par une équation du second degré. Par exemple soit $x^3 = 3xx + 6x + 20$. donc $3 = a$, $6 = bc$ & $20 = def$. Je trouve par ma formule $y = 1 + \sqrt[3]{1 + 3 + 10 + \sqrt{20 + 60 + 100 - 8 - 3}}$, &c. $= 1 + \sqrt[3]{14 + \sqrt{169}} = 1 + \sqrt[3]{27} = 4$, & $z = \sqrt[3]{14 - 13} = 1$. donc $x = 5$. Je divise $x^3 - 3xx - 6x - 20 = 0$. par $x - 5$, le quotient est une équation du second degré qui renferme les deux autres valeurs d'x.

J'ay trouvé de même une formule universelle pour les quatres racines des équations du quatriéme degré, & parce que l'on peut supposer arbitrairement dans l'équation un ou plusieurs termes $= 0$. Si l'on suppose aussi dans les racines tous les termes où ces lettres égales à zero se rencontrent, si dis-je on les suppose évanoüis, on aura la formule la plus simple pour chaque cas, non seulement du quatriéme degré; mais encore du troisieme, du second & du premier. Car chaque formule des degrez inferieurs est enfermée dans les formu-

les universelles des degrez superieurs. Ainsi la seule formule universelle du troisiéme degré enferme les deux du premier, les 6 du second, & les 18 particulieres du troisiéme, & la seule formule universelle du quatriéme degré enferme les 80 formules particulieres du premier, second, troisiéme & quatriéme degrez.

Il n'y a rien de nouveau à remarquer sur les Problemes plus que déterminez du quatriéme degré. La Regle générale est d'égaler tout à zero, & de diviser la plus haute équation par la moins élevée, ou l'également élevée l'une par l'autre, continuellement jusques à ce que l'on trouve le reste ou le diviseur le plus simple. Ce qui donnera la valeur la plus simple de la racine si le Probleme est possible. Cette methode est d'un grand usage dans l'application qu'on peut faire de l'Algebre à la Geometrie. Elle est fondée sur ce principe Metaphysique, que *rien étant ôté ou divisé par rien, le reste & le quotient sont égaux à rien.*

Exemple.

Soit la double équation $x^4 - 12x^3 + 43xx - 50x + 50 = 0$, & $x^3 - 7xx + 8x - 10 = 0$, je divise la pre-

miere par la seconde, le quotient est $x - 5 = 0$, d'où je conclus qu'une des valeurs d'x est 5.

Soit encore la double équation $x^4 - 17xx - 20x - 100 = 0$, & $x^3 - 7xx + 8x + 10 = 0$. Je divise la premiere par la seconde le quotient est x, & il reste $7x^3 - 25xx - 30x - 100 = 0$. que je divise par $x^3 - 7xx + 8x + 10$, le quotient est 7 & il reste $24xx - 86x - 170 = 0$, je multiplie $x^3 - 7xx + 8x + 10 = 0$ par 24, afin de pouvoir diviser sans fraction par $24xx - 86x - 170$. & j'ay $24x^3 - 168xx + 192x + 240$ à diviser par $24xx - 86x - 170 = 0$, le quotient est x, & il reste $-82xx + 362x + 240 = 0$ ou $41xx - 181x - 120 = 0$. J'ay les deux équations du second degré $24xx - 86x - 170 = 0$, & $41xx - 181x - 120 = 0$ par la premiere $xx = \frac{86x - 170}{24} = \frac{43x - 85}{12}$, & par la seconde $xx = \frac{181x + 120}{41}$, donc $\frac{43x + 85}{12} = \frac{181x + 120}{41}$. Et cette équation du premier degré étant resoluë par les Regles du Chap. 1. je trouve $x = 5$. mais parce que la premiere divi-

ſion qui a donné x pour quotient ne s'eſt pas faite ſans reſte, je ne ſuis pas aſſuré que 5 ſoit une valeur d'x; c'eſt pourquoy je ſubſtitue 5 à la place d'x, & je trouve qu'il ſatisfait.

Des Problemes indéterminez du quatriéme degré.

IL faut former le ſecond membre arbitraire de maniere qu'il ne reſte que des x^4, & des x^3, ou des x^3 & des xx ou des xx & des x, ou enfin des x & des nombres, afin que la valeur d'x ſoit rationelle.

Exemple.

Soit l'équation $x^4 - 10x^3 + 26xx - 7x + 9 = yy$, je ſuppoſe $y = xx - 5x + 3$. je prens $- 5x$, parce que la moitié du ſecond terme $- 10x^3$ eſt $- 5x^3$, & je prens $+ 3$ à cauſe du dernier terme $+ 9$. La ſubſtitution me donne $x^4 - 10x^3 + 26xx - 7x + 9 = x^4 - 10x^3 + 31xx - 30x + 9$, donc $5x = 23$ & $x = 4\frac{3}{5}$ nombre cherché.

Ayant cette premiere reſolution j'en trouveray de nouvelles en ſuppoſant $x = y \pm 4\frac{3}{5}$, en ſorte même que quand la premiere

premiere valeur seroit negative, on pourroit par cette substitution en trouver d'autres positives, suivant la remarque de Monsieur de Fermat. Au lieu de supposer $y = xx - 5x + 3$. j'aurois pu supposer $y = xx - tx + u$; & j'aurois trouvé par la substitution en comparant les termes homogenes $t = 5$ & $u = 3$. Il n'y a point de resolutions par formules au de là du quatriéme degré, du moins on ne les a pas trouvées.

CHAPITRE V.

Methode générale de Monsieur Descartes, pour la resolution des Equations qui ont des racines rationelles.

1°. L'Equation étant preparée, c'est à dire délivrée de fractions & d'incommensurables, & l'absolu de la haute puissance réduit à l'unité; faites par la transposition que tout soit égal à zero.

2°. Prenez tous les diviseurs de l'absolu, & tentez la division par $x +$ ou $-$ chacun de ces diviseurs.

3°. Si la division se fait sans reste par $x -$ quelque diviseur, ce diviseur est une racine positive.

Si la division se fait sans reste par x + quelque diviseur, ce diviseur est une racine negative.

4°. Continuez de diviser les quotients, & vous aurez toutes les racines rationelles positives & negatives.

Que si la division ne se peut point faire sans reste, l'équation proposée n'a aucune racine rationelle.

Et si elle ne se peut pas faire sans reste autant de fois que l'exposant de la haute puissance a d'unitez, c'est une preuve qu'une partie de ses racines est rationelle, & l'autre irrationelle dans un degré inferieur.

Enfin si la division se peut faire sans reste autant de fois que l'exposant de la haute puissance a d'unitez, toutes ses racines sont rationelles.

Premier Exemple.

Soit l'équation proposée.

$$x^3 - 72x - 280 = 0.$$

Les diviseurs primitifs de 280 sont 1. 2. 2. 2. 5. 7. nombre premiers d'où on forme les diviseurs lineaires.

	1. 2. 5. 7.
Les diviseurs plans	4. 10. 14. 35.
Les diviseurs solides	8. 20. 28. 70.
Les divis. de 4 dimens.	40. 56. 140.
à 5 dimensions	280.

En tentant la division par $x - 10$. elle reüssit

$$\begin{array}{l|l} x^3 - 72x - 280 & xx + 10x + 28 = 0. \\ \hline x - 10 & \\ x^3 - 10xx & \\ \quad + 10xx - 72x & \\ \qquad x - 10 & \\ \quad + 10xx - 100x & \\ \qquad\quad + 28x - 280 & \\ \qquad\qquad x - 10 & \\ \qquad\quad + 28x - 280 & \\ \hline \qquad\qquad 0 \quad 0. & \end{array}$$

D'où je conclus que une des valeurs d'x est $+ 10$. & que les deux autres racines sont negatives, & comprises dans l'équation du quotient $xx + 10x + 28 = 0$, qui sont $x = -5 + \sqrt{-3}$
$x = -5 - \sqrt{-3}$.

Second Exemple.

Soit l'équation $x^3 - 19x + 30 = 0$. Elle est dans le cas irreductible.

1°. Je prens les diviseurs de 30. qui sont 1. 2. 3. 5. 6. &c. Je tente la division par $x - 2$. & elle reüssit.

$x^3 - 19x + 30 \mid xx + 2x - 15 = 0$

$$\begin{array}{l} x - 2 \\ x^3 - 2xx \\ \quad + 2xx - 19x \\ \qquad x - 2 \\ \quad + 2xx - 4x \\ \qquad\qquad - 15x + 30 \\ \qquad\qquad\quad x - 2 \\ \qquad\qquad - 15x + 30 \\ \hline \qquad\qquad\quad 0 \quad 0. \end{array}$$

D'où je conclus qu'une des valeurs d'x eſt $+ 2$.

Je continue à chercher les deux autres racines dans l'équation $xx + 2x - 15 = 0$.

Et je tente la diviſion par $x - 3$.

$xx + 2x - 15 \mid x + 5 = 0$.

$$\begin{array}{l} x - 3 \\ xx - 3x \\ \quad + 5x - 15 \\ \qquad x - 3 \\ \quad + 5x - 15 \\ \hline \qquad 0 \quad 0. \end{array}$$

D'où je conclus que les trois valeurs d'x ſont $+ 2$. $+ 3$. & $- 5$.

Remarque.

Lors qu'il y a un fort grand nombre de diviſeurs, l'operation eſt longue & ennuyeuſe, ſur tout lors qu'aprés un grand nombre de diviſions on ne trouve point de diviſeur exact; c'eſt pourquoy on a cherché des Regles pour rejetter les diviſeurs inutiles, & elles ſe réduiſent à deux.

1°. A trouver les limites des racines; c'eſt à dire à trouver deux nombres par regle générale, entre leſquels la valeur de la racine doive ſe trouver neceſſairement. Ainſi tous les diviſeurs qui ne ſont pas entre ces limites ſont inutiles. J'en ay donné des exemples cy-deſſus Chapitre 3.

2°. En augmentant ou en diminuant l'inconnuë d'une unité, ou de tel autre nombre qu'on voudra; & ſubſtituant on trouve un nouvel abſolu qui n'a qu'un certain nombre de diviſeurs. Or ces diviſeurs étant diminuez ou augmentez d'une unité ou de tel autre nombre qu'on voudra, ſelon que l'inconnuë a été diminuée ou augmentée d'une unité ou d'un autre nombre, il n'y a que les diviſeurs communs qui puiſſent être utiles;

& souvent il n'y en a point du tout, ce qui marque que la racine est irrationelle, & supposé qu'il y ait des diviseurs communs, le nombre en est ordinairement beaucoup moindre ; ce qui épargne plusieurs de divisions.

3°. Quoique la racine soit irrationelle, elle peut être irrationelle d'un ou de plusieurs degrez moindres que ne le marque l'exposant de la haute puissance. Ainsi dans les équations du quatriéme degré, les quatre racines peuvent être irrationelles du second degré ; & il faut tenter la division par $xx \pm a$, & par $xx \pm ax \pm b = 0$, &c.

4°. Lors qu'il y a plusieurs racines égales dans une équation, il y a des regles particulieres & abbregées pour les resoudre.

Exemple.

Soit l'équation proposée cy-dessus $x^3 - 72x - 280 = 0$. Les diviseurs de 280. sont 1. 2. 4. 5. 7. 8. 10. 14. 20. 28. 35. 40. 56. 70. 140. 280. & c'est en tout 16 diviseurs. Je suppose $x = y + 1$. & en substituant je trouve $y^3 + 3yy + 3y + 1 - 72y - 72 - 280 = 0$. ou $y^3 + 3yy - 69y - 351 = 0$.

Je prens les diviſeurs de 351, qui ſont 1. 3. 9. 13. 27. 39. 117. 351.

Ces diviſeurs augmentez de l'unité donnent pour diviſeurs communs de la premiere équation.

2. 4. 10. 14. 28. 40.

Ainſi de 16 diviſeurs il n'en reſte à examiner que 6.

Remarquez que la ſubſtitution eſt inutile pour augmenter de l'unité, car comme il ne s'agit que de trouver l'abſolu 351. Je le trouve en ajoûtant 72 à 280. & retranchant 1. de la ſomme 352.

Et généralement il n'y a qu'à ajoûter à l'abſolu les abſolus qui ont même ſigne, & retrancher les abſolus qui ont un ſigne contraire.

En ſuppoſant $x = y - 1$. on trouve en ſubſtituant $y^3 - 3yy + 3y - 1 - 72y + 72 - 80 = 0$

ou $y^3 - 3yy - 69y - 209 = 0$.

Les diviſeurs de 209 ſont 1. 11. 19. 209. Leſquels étant diminuez d'une unité, il reſte pour diviſeurs communs, 10. 18. 208.

Or il n'y a que 10. qui ſe trouve parmi les diviſeurs de 280. donc ou 10 eſt la racine cherchée, ou il n'y en a point de rationelle.

On peut s'épargner la ſubſtitution

par — 1. Car on ne cherche que l'absolu 209. & pour cela il faut soustraire de l'absolu 280. tous les absolus des degrez impairs de même signe; & tous les absolus des degrez pairs de differens signes, & ajoûter les absolus des degrez pairs de même signe, & les absolus des degrez impairs de different signe.

Ainsi dans l'exemple proposé.

$$1x^3 - 72x + 280.$$

J'écris $280 + 1 - 72 = 209.$

De la formation des Equations suivant cette methode.

Si l'on suppose $x + a = 0$
$x + b = 0$
$x - c = 0.$ & $c = a + b$, & qu'on multiplie continuellement ces trois équations l'une par l'autre, on trouvera

$$\begin{aligned} x^3 * + abx - abc &= 0. \\ - acx & \\ - bcx. & \end{aligned}$$

Et parce que $c = a + b.$
donc $ac + bc = aa + 2ab + bc.$
donc $+ ab - ac - bc = - aa - ab - bc.$ Donc la formule $x^3 - ax - b = 0$ est formée de trois racines, deux negatives & une positive, dont les deux

negatives

negatives jointes ensemble sont égales à la positive.

$$\begin{array}{l} x + a \\ x + b \\ \hline xx + ax + ab \\ \quad\;\; + bx \\ \hline \quad\;\; x - c \\ x^3 + axx + abx - abc = 0. \\ \quad\; + bxx - acx \\ \quad\; - cxx - cbx \end{array}$$

En formant de même les autres équations on prouve ces grandes maximes de l'Algebre.

1°. Que toute équation a autant de racines que l'exposant de la haute puissance a d'unitez.

2°. Qu'il y a autant de racines positives qu'il y a de fois de changemens des signes + & —, & autant de racines fausses qu'il y a de fois le même signe deux fois de suite.

Cecy ne doit s'entendre que des équations, dont toutes les racines sont réelles & non pas des équations où il y a des racines imaginaires.

3°. Qu'en changeant les signes des degrez impairs, toutes les racines positives deviennent negatives; & toutes

les negatives deviennent positives.

4°. Qu'en augmentant ou en diminuant les racines d'une équation sans les connoître, par la substitution d'une nouvelle inconnuë, si l'on augmente d'une quantité égale à une racine negative; & si l'on diminuë d'une quantité égale à une racine positive, l'on diminuë le nombre des racines, & par consequent on abbaisse l'équation d'un degré par l'évanoüissement du dernier terme.

Et s'il y a plusieurs racines égales on abbaisse d'autant de degrez qu'il y a de ces racines égales.

5°. L'absolu du second terme est égal à la somme des racines, & si ce terme est nul; c'est que la somme des racines positives est égale à la somme des racines negatives.

6°. L'absolu du troisiéme terme est égal à la somme des plans, contenus sous chaque deux racines.

7°. L'absolu du quatriéme terme est égal à la somme des solides, compris sous chaque trois racines; & ainsi des autres.

8°. Le dernier terme ou l'absolu est toûjours égal au produit continuel de toutes les racines.

CHAPITRE VI.

De la methode de Mediation.

LA Methode de *Mediation*, consiste à prendre pour racine de l'équation proposée un nombre plus grand & un nombre plus petit que l'une des racines positives, ce qui est fort aisé; en prenant d'abord 1. & 10. ou 1. & 100. ou 1. & 1000. on substituë l'un de ces nombres à la place de l'inconnuë dans l'équation preparée où le premier terme est +, & tous les termes sont égaux à zero, & s'il ne reste rien, le nombre qu'on a pris est une racine cherchée, s'il reste quelque chose, ou ce reste est positif ou il est negatif.

S'il est positif le nombre qu'on a pris est trop grand, si ce reste est negatif, le nombre qu'on a pris est trop petit.

Si ce nombre est trop grand, il faut en prendre la moitié & substituer de nouveau cette moitié en entiers; & la moitié de cette moitié à l'infini jusques à ce qu'on trouve un reste negatif.

Si le reste est negatif, il en faut prendre le double, & le double du

double à l'infini ; & le ſubſtituer juſques à ce qu'on trouve un reſte poſitif.

Lors qu'on a une hypotheſe qui donne un reſte poſitif, & une hypotheſe qui donne un reſte negatif. La premiere eſt trop grande, & la ſeconde trop petite; il faut prendre pour nouvelle hypotheſe la moitié de leur ſomme, & continuer de même juſques à ce qu'on trouve une hypotheſe ſans reſte qui ſatisfait, ou deux hypotheſes qui ne different que d'une unité, dont l'une eſt trop grande & l'autre trop petite.

Exemple.

Soit l'équation $x^5 - 570x - 275 = 0$. Cette équation ne peut être reſoluë par aucune formule; car on n'en a point trouvé pour les équations au delà du quatriéme degré.

Je ſuppoſe $x = 1$. & il eſt évident que cette racine eſt trop petite, car en ſubſtituant on trouve $-844 = 0$. Je ſuppoſe $x = 10$. & en ſubſtituant je trouve.

$$100000 - 5700 - 275 = 0.$$

ou $100000 - 5975$ ou $+ 94025 = 0$.

D'où je conclus que 10 est trop grand & 1 trop petit. Je les ajoûte ensemble; c'est 11. dont la moitié en entiers est 5. je substituë 5 & je trouve

$$3125 - 2850 - 275 = 0$$
$$\text{ou} \quad 0 = 0.$$

D'où je conclus que 5 est la veritable racine de l'équation proposée.

Second Exemple.

Soit l'équation $x^5 + 237x - 648357 = 0$.

Je suppose $x = 10$. & je trouve en substituant.

$$100000 + 2370 - 648357 = 0.$$
$$\text{ou } 102370 - 648357 = 0$$
$$\text{ou } - 545987 = 0.$$

D'où je conclus que 10 est trop petit.

Je suppose $x = 20$. & je trouve en substituant.

$$3200000 + 4740 - 648357 = 0.$$

$$\begin{array}{r} 3204740 \\ -648357 \\ \hline \end{array}$$

$+ 2556383 = 0$. D'où je conclus que 20 est trop grand. J'ajoûte 10 & 20. & je prens la moitié de la somme,

c'est 15. que je substitue à la place d'x, & je trouve

$3375 + 3555 - 648357 = 0.$
Il reste + d'où je conclus que 15 est trop grand; mais 10 étoit trop petit, c'est pourquoy j'ajoûte 10 & 15, c'est 25. dont je prens la moitié c'est 12. que je substituë, & je trouve

$248732 + 2844 - 648357 = 0.$
qui me donne — d'où je conclus que 12 est trop petit & 15 trop grand, j'ajoûte 12 & 15, & la somme 27. je prens la moitié 13. que je substituë & je trouve.

$370293 + 3081 - 648357 = 0.$
qui me donne encor — d'où je conclus que 13 est trop petit; mais 15 étoit trop grand, il faut donc que 14 soit la veritable racine ou il n'y en a point de rationelle. Je substituë 14. & je trouve

$537824 + 3318 - 648357 = 0.$
qui me donne encor — d'où je conclus que la racine cherchée est entre 14 & 15.

Cette methode est un peu longue, mais on est assuré de trouver à la fin la racine cherchée, ou le nombre qui en approche le plus s'il n'y a point de racine exacte.

Aprés avoir trouvé une racine soit po-

sitive, soit negative (car on peut si l'on veut supposer un nombre negatif; & substituer conformement à cette hypothese) il faut diviser l'équation par x + la racine negative ou par x — cette racine positive; & on abbaissera l'équation pour le moins d'un degré, & on operera de même sur l'équation abbaissée pour trouver les autres racines.

Remarquez qu'il n'est pas toûjours necessaire de faire la substitution entiere, parce qu'il ne s'agit que de voir si le nombre qu'on a pris est trop grand ou trop petit. Or on le peut juger d'abord & tres-souvent par le premier terme.

La difficulté est de former d'abord des hypotheses, qui approchent à peu prés de la valeur des racines cherchées; & pour cela il faut se servir des limitations propres à chaque équation, ou de la methode que Monsieur Rolle appelle des *Cascades*.



CHAPITRE VII.

Methode des Cascades.

1°. MUltipliez chaque terme de l'équation par son propre exposant, & divisez le produit par l'inconnuë.

2°. Multipliez tous les termes de cette nouvelle équation, chacun par son exposant; & le produit par le double de l'inconnuë.

3°. Multipliez de même tous les termes de cette nouvelle équation, chacun par son exposant. Et divisez le produit par le triple de l'inconnuë, & ainsi de suite jusques à ce que vous n'ayez qu'une équation du premier degré, chacune de ces équations s'appelle *Cascade*.

La petite hypothese sera toûjours zero, & la grande sera le quotient du plus grand absolu negatif, divisé par l'absolu du premier terme; & si la division est exacte il faut augmenter le quotient d'une unité, si elle n'est pas exacte il faut prendre le nombre entier prochainement plus grand.

Dans toute équation égalée à zero, il y a toûjours quelque terme negatif, si il y a au moins une racine positive;

mais s'il n'y en a point il eſt aiſé d'y en introduire, en changeant les ſignes des termes impairs. Et remarquez que l'abſolu ou le dernier terme dont l'expoſant eſt zero, eſt cenſé avoir un expoſant pair; & que les racines negatives deviennent poſitives par ce changement de ſignes.

La premiere caſcade donne deux hypotheſes, ſavoir o. & le quotient cy-deſſus.

La ſeconde caſcade aura trois hypotheſes, o, ce quotient, & ſon quotient propre.

Par ces trois hypotheſes extremès on trouvera ſes deux racines, car la ſeconde caſcade eſt toûjours du ſecond degré; & entre chaque deux hypotheſes, dont l'une eſt certainement trop grande, & l'autre certainement trop petite, on trouvera les veritables racines par la methode cy-deſſus de Mediation, ou d'approximation par ſubſtitution.

Les racines de la ſeconde caſcade ſerviront d'hypotheſes moyennes à la troiſiéme caſcade, & celle de la troiſiéme à la quatriéme; & ainſi de ſuite juſques à la derniere qui eſt l'équation propoſée, dont les racines donneront les racines cherchées.

Exemple.

Soit l'équation proposée.
$y^3 - 57yy + 936y - 3780 = 0$, & c'est la troisiéme cascade.

Je la multiplie par 3. 2. 1. 0. & je divise le produit par y, le quotient est $3yy - 114y + 936 = 0$. seconde cascade.

Je la multiplie par 2. 1. 0. & je divise le produit par $2y$, le quotient est $3y - 57 = 0$. J'ay donc pour premiere cascade. $3y - 57 = 0$. Ses hypotheses sont 0 & $19. = \frac{57}{3}$ la seconde cascade est $3yy - 114y + 936 = 0$. Ses trois hypotheses sont 0. 19. & $39 = \frac{114}{3} + 1$.

Par 0. & 19. je trouve qu'une des racines de cette seconde cascade est 12. & par 19 & 39. je trouve que l'autre est 26. enfin dans la troisiéme cascade les hypotheses extremes sont 0. & $3781 = \frac{3780}{1} + 1$.

Et y joignant les racines de la cascade precedente 12 & 26. Je trouve les quatre hypotheses 0. 12. 26. 3781. entre 0. & 12. je trouve 6 : entre 12 & 26. je trouve 21 : entre 26. & 3781. je trouve 30. Ainsi les trois racines cher-

chées de l'équation proposée.

$y^3 - 57yy + 936y - 3780 = 0.$

Sont 6. 21. & 30.

CHAPITRE VIII.

Methode de Viete.

La methode de Viete consiste à résoudre les équations qu'il appelle *affectées*, c'est à dire où il y a des termes moyens, à peu prés de même qu'on resout les équations *pures*, où il n'y a que deux termes ; savoir l'inconnuë d'un côté & l'absolu de l'autre.

La methode ordinaire pour le second degré est la plus simple de toutes.

Celle de Viete commence à être d'usage dans le troisiéme degré, sur tout pour le cas irreductible, & elle s'étend à tous les degrez à l'infini. On suppose l'équation preparée, c'est à dire delivrée de fractions & d'incommensurables, & l'absolu de la haute puissance réduit à l'unité. On suppose l'inconnuë de plus d'un chifre, parce que lors qu'elle n'est que d'un chifre, elle est si aisée à trouver qu'il ne faut point pour cela de me-

thode, de même que dans l'extraction de la racine quarrée & de la racine cubique, on suppose qu'on sache par cœur les neuf premiers quarrez, & les neuf premiers cubes.

Il est au moins toûjours aisé de trouver cette racine exprimée par un seul chifre par la methode de Mediation, expliquée dans le Chapitre 6.

On divise l'absolu de droite à gauche, de deux en deux, si c'est une équation du second degré ou de trois en trois, si c'est une équation du troisiéme degré, & ainsi de suite. On divise les autres absolus à proportion de leur dimensions, & on se regle par le plus grand dans son genre. On suppose l'inconnuë égale à un binome $a + b$, dont a marque le premier chifre connu, & b marque le second chifre de gauche à droite, & qui est inconnu. On substitue suivant cette supposition, & on égale ce qui resulte au nombre donné; afin de trouver un diviseur, mais on neglige la puissance pure de b.

Le quotient étant pris pour b, on ôte le produit & on regarde ensuite $a + b$, comme un seul nombre a; & on suppose de nouveaux $x = a + b$, ou b marque le troisiéme chifre, & ainsi de

suite jusques à ce qu'on ait trouvé la racine ou le nombre qui en approche d'avantage.

Premier Exemple.

Soit l'équation $x^3 = 5834x + 19500$. ou $x^3 - 5834x = 19500$, qui est dans le cas irreductible.

1°. Je divise 19500. en deux tranches. 19 | 500. de trois en trois, parce que c'est un solide.

2°. Je divise l'absolu 5834. de deux en deux, parce que c'est un plan.

3°. J'examine quel est la plus grande, ou de la racine cubique de 19, ou de la racine quarrée de 58. & trouvant que c'est la racine quarrée de 58. dont la racine approchée est 7. Je prens 7 pour premier chifre de ma racine qui doit avoir deux chifres à cause des deux tranches, ainsi 7 sont des dixaines.

Je suppose $x = a + b = 70 + b$.

Et substituant cette valeur dans l'égalité

$$x^3 - 5834x = 19500.$$

Je trouve $343000 + 14700b + 210bb + b3 = x^3$. &

$$-408380 - 5834b = -5834x.$$

donc $-65380 + 8866b + 210bb + b^3 = 19500$

ou $8866b + 210bb + b^3 = 84880$.

Je prens pour diviſeur $8866 + 210$ en negligeant b^3, & comme s'il n'y avoit que $8866b + 210b$. & je dis en 84880. combien de fois 9076, & je prens pour le quotient b un nombre plus petit, parce qu'il faut que non ſeulement $8866b + 210b$ puiſſe être ôté de 84880. mais il faut qu'on puiſſe ôter $8866b + 210bb + b^3$. Ainſi je ne prens que $8 = b$ que je ſubſtituë, & je trouve $84880 = 84880$.

D'où je conclus que la racine cherchée eſt 78.

Second Exemple.

Soit l'équation $x^5 + 300x = 3845638$, je diviſe 3845638 en deux tranches 38 | 45638. & parce que l'abſolu 300 eſt de quatre dimenſions ; & qu'il n'a qu'une tranche, n'ayant que trois chifres, je me regle par l'abſolu 38 | 45638. & je prens pour premiere figure de la racine cherchée la racine cinquiéme enfermée dans 38 : c'eſt 2. & ce ſont des dixaines.

Je ſuppoſe donc $x = 20 + b$.

Et en ſubſtituant je trouve

$3200000 + 800000b + 80000bb + 4000b^3 + 100b^4 + b^5 + 6000 + 300b$. ou

$3206000 + 800300b + 80000bb + 4000b^3 + 100b^4 + b^5 = 3845638$

il reste $800300b + 80000bb + 4000b^3 + 100b^4 + b^5 = 639638$.

Je prens pour diviſeur 884400.

$$\begin{array}{r} 800300 \\ + 80000 \\ + 4000 \\ + 100 \\ \hline 884400 \end{array}$$

ce qui me donne moins d'1 pour quotient; d'où je conclus que la racine cherchée eſt entre 20 & 21.

Cecy peut ſuffire pour donner une idée de cette methode, qui a été expliquée fort au long dans tous ſes cas juſques au quatriéme degré incluſivement par Thomas Harriot Anglois, qui a fait là deſſus un gros Volume in folio. On doit en ces matieres ſe contenter de prendre tout l'eſprit & toute la fleur de ces ſortes d'inventions, & laiſſer la peine du détail aux Calculateurs de profeſſion.

Additions & éclairciſſemens ſur quelques endroits.

CHap. 1. pag. 1. il y a des unitez *réelles*, comme lors qu'on deſigne un tel être ou une telle maniere d'être; *un homme*, *un ſon*, &c. & des unitez *arbitraires*, comme lors qu'on dit *une Nation*, *une armée*, &c. ce ſont des tous Moraux composez de parties réellement ſeparées ; & qui ne ſont pas de même nom que leur tout, mais que l'eſprit unit ſous differens rapports. Nous n'avons les premieres idées des nombres qu'à l'occaſion de pluſieurs ſenſations differentes ou diſtinctes de même genre, & qui conviennent au moins ſous l'idée générale de l'être.

Chap. 2. pag. 4. ligne 17. *l'Unité fait une eſpece de nombre à part*, parce qu'elle a pluſieurs proprietez qui ne conviennent pas aux autres nombres & au contraire ; c'eſt pourquoy Monſieur Barrou dans ſes Commentaires ſur le 7. 8 & 9 Livres des Elemens d'Euclide diſtingue dans pluſieurs propoſitions celles où l'unité eſt priſe pour nombre, & celles où elle n'eſt pas priſe pour nombre.

Chap. 4.

Chap. 4. page 19. l'expression des nombres qui est demonstrativement la plus simple & la plus naturelle est celle des points

un	.	
deux	:	
trois	⁝	
quatre	⁞	&c.

Ainsi pour exprimer 2341, j'écrirois ⁚ ⁝ ⁞ . mais afin que cette expression fût commode & praticable, il faudroit que la progression au lieu d'être de dix en dix, ne fut que de 5 en 5, & qu'on exprimât les zero, ou les places vuides par autant de points horizontaux d'un rang plus élevé. Par exemple pour exprimer 5, 25, 125, 625, &c. j'écrirois . ·, . · ·, . · · ·, . · · · ·, &c. Il est évident qu'on ne sauroit imaginer d'expression plus simple & plus abbregée que celle des points, & qu'il y a un rapport naturel entre l'expression & la chose exprimée, lors qu'on exprime un par un point, deux par deux points, &c. Et de même une dixaine, deux dixaines, &c. une cent aine, deux centaines, &c. par un point, deux points, &c. avec les marques les plus simples qu'il soit possible de leur valeur.

Page 20. ligne 28. *suivant cette pro-*

gression Geometrique, c'est à dire qu'au lieu d'exprimer ainsi les nombres.

un	1.
dix	10
cent	100
mille	1000
million	1000000
billion	1000.000.000
trillion	1000.000.000.000.&c.

On les exprimeroit de cette maniere,

un	1
dix	10
cent	100
mille	10.00.
million	10000.0000.
billion	100000000.00000000.
trillion	10000000000000000. 0000000000000000. &c.

où le nombre des zero va toûjours en doublant.

Page 219. pour démontrer par exemple que 23571 est divisible par 9. parce que 2 + 3 + 5 + 7 + 1 = 18, & que 1 + 8 = 9; voicy comment je raisonne 23571 est la même chose que 20000 + 3000 + 500 + 70 + 1. Or par la Table cy-dessus il est évident que 20000 étant divisé par 9, il reste 2: que 3000 étant divisé par 9 il reste 3: que 500 étant divisé par 9 il re-

ste 5, &c. donc 23571 étant divisé par 9, il restera 2 + 3 + 5 + 7 + 1. donc si 2 + 3 + 5 + 7 + 1 = 18 est divisible par 9. Le nombre donné 23571 sera aussi divisible par 9. & si ce reste n'eût pas été divisible par 9, mais qu'il y eut un second reste, le nombre donné n'auroit pas été divisible par 9, & il y auroit eu le même reste. C'est le même raisonnement pour les nombres divisibles par 3.

Pages 242. 243. & 244. cette methode est d'Oughtred, & en voicy la Demonstration.

Dans la Regle de trois 100000. 80902 : 39875. 32260. il faudroit suivant la Regle générale multiplier 80902 par 39875, & diviser le produit 3225967250 par 100000. c'est à dire qu'il faudroit retrancher de ce produit les cinq derniers chifres 67250, & que le quatriéme nombre cherché seroit 32259 $\frac{67250}{100000}$ ou à peu prés en entiers 32260; mais parce qu'on prévoit que les cinq derniers chifres 67250 sont inutiles, puis qu'ils doivent être retranchez, on peut s'épargner toutes les operations qui les produisent; & pour cela je ne multiplie que les nombres dont le produit est égal ou plus grand, ou ap-

prochant de 100000. Or 80902 est la même chose que 80000 + 900 + 2. & 39875 est la même chose que 30000 + 9000 + 800 + 70 + 5. Et commençant par 30000, je vois qu'en le multipliant par 2, il ne produit que 60000; mais parce que 60000 est plus grand que la moitié de 100000. Je retiens 1. & je continue de multiplier 8090 par 3, & au produit 24270. j'ajoûte cet 1. & j'écris 24271., qui represente 2427100000. ou plûtôt 2427060000.

Je passe ensuite au second chifre du multiplicateur qui est 9. & qui vaut 9000. Et afin que son produit soit égal ou plus grand ou approchant de 100000, il faut que je le multiplie par un nombre de centaines, ou du moins par un nombre de dixaines; ainsi je multiplie seulement 809 par 9, & j'écris le produit 7281, qui represente 728100000 produit de 80900 par 9000. ou plûtôt il me represente 728118000. produit de 80902 par 9000. & ainsi du reste.

Page 303. *Regle générale.*

Voicy l'origine de ces formules, soit l'équation proposée en entiers $zp = ap \pm b$, & que z soit plus grand ou plus petit que a de moins d'une unité. Je

ſuppoſé $z = \frac{1}{2} a + x$. donc x vaut plus que $\frac{1}{2} a - 1$ ou moins que $\frac{1}{2} a + 1$. j'éleve ce binome $\frac{1}{2} a + x$ à la puiſſance p; & j'ay dans le quarré $zz = \frac{1}{4} aa + ax + xx = aa \pm b$; & dans le cube j'ay $z^3 = \frac{1}{8} a^3 + \frac{3}{4} aax + \frac{3}{2} axx + x^3 = a^3 \pm b$.

Je forme de la puiſſance de ce binome deux ſommes alternatives en prenant le premier, le troiſiéme, le cinquiéme termes, &c. d'un côté; & le ſecond, le quatriéme, le ſixiéme, &c. termes d'un autre côté. J'égale chaque ſomme à $\frac{a^p \pm b}{2}$, d'où je tire les valeurs d'x, & par conſequent de z racine approchée. Et en continuant l'operation ſur les mêmes principes & les mêmes formules, on trouve une ſuite indefinie de racines qui approchent toûjours de plus en plus à l'infini.

La raiſon pourquoy la puiſſance entiere du binome étant égale à $a^p \pm b$, j'égale chaque ſomme alternative à la moitié de $a^p \pm b$. C'eſt que ces deux ſommes alternatives ſont ſenſiblement égales & à moins d'une unité prés. Car ſi $a - b = c$, & que c ſoit une fraction; toute puiſſance d'$a - b$ ſera auſſi une fraction. Or la puiſſance d'$a - b$ eſt ſemblable à la

puissance homogene d'$a + b$, & toute la difference consiste en ce que tous les termes de celle-cy sont positifs, & ceux de l'autre sont alternativement positifs & negatifs. Le cube d'$a + b$ est $a^3 + 3aab + 3abb + b^3$; le cube d'$a - b$ est $a^3 - 3aab + 3abb - b^3$. donc si a surpasse b de la quantité c; $a^3 + 3abb$ surpassera $3aab + b^3$ de c^3, c'est à dire que la premiere somme alternative surpassera la seconde de moins d'une unité. Or par l'hypothese dans le binome $\frac{1}{2}a + x$; $\frac{1}{2}a$ surpasse, ou est surpassé par x de moins d'une unité; donc dans le quarré $\frac{1}{4}aa + ax + xx$, & dans l'équation $\frac{1}{4}aa + ax + xx = aa \pm b$ je puis égaler $\frac{1}{4}aa + xx$, & ax chacun à $\frac{aa \pm b}{2}$ & égalant ax, je trouve $x = \frac{1}{2}a \pm \frac{b}{2a}$, & par consequent $z = \frac{1}{2}a + x = a \pm \frac{b}{2a}$, & dans le cube j'ay $\frac{1}{8}a^3 + \frac{3}{2}axx = \frac{a^3 \pm b}{2}$ & $\frac{3}{4}aax + x^3 = \frac{a^3 \pm b}{2}$. Le Probleme est plus que determiné, puisque j'ay deux équations & que je n'ay qu'une inconnuë; & operant suivant la Regle de ces Problemes, je trouve $x = \frac{1}{2}a \pm \frac{ab}{3a^3 \pm b}$, & par

consequent $z = a \pm \frac{ab}{3a^3 \pm b}$, &c.

Page 453. ligne 24. $24yy - 423 = 9zz = uu$, une des valeurs d'y dans cette équation simple est 6; car 24 fois 36, moins $423 = 864 - 423 = 441$ quarré de 21, & puisque $3x + 15 = 36$, on trouve $x = 7$ & $z = 7$. Je ne marque pas comment on peut resoudre ces équations simples du second degré $\pm axx \pm b = yy$. Ces équations sont toûjours insolubles, lorsqu'elles se réduisent à diviser en deux quarrez en fractions, un nombre qui n'est pas composé de deux quarrez en entiers; ainsi $6 - xx = yy$ est une équation insoluble. Dans les autres cas, lorsque a ou b sont des quarrez positifs, il sera toûjours aisé de les resoudre, comme l'équation cy-dessus $9yy - 2 = uu$. Mais lorsque ni a ni b ne sont des quarrez positifs, on pourra se servir des Regles particulieres que je donneray dans le Receüil des nouvelles Découvertes; & qui sont trop longues & trop difficiles pour trouver place dans des Elemens.

FIN.

ERRATA.

PAge 14. ligne 28. *vingt-un*, dele.

Page 15. lig. 1. *vinte-un*, lisez *vinte-deux*.

Page 35. lig. 12. 43*a*, lisez 23*a*.

Page 103. lig. 16. *la soustraction doit*, lisez *la division doit*.

Page 107. lig. 20. *differentes à proportion*, lisez *en proportion differente*.

Page 190. lig. 13. *d b*, lisez *d* F.

Page 232. lig. 25. *mesuré* 20. lisez *mesuré par* 20.

Page 331. lig. 1. *chacun p*, lisez *chacun b*.

LIVRES DE MATHEMATIQUE,

Imprimez, ou qui se trouvent chez JEAN JOMBERT, *prés des Augustins, à l'Image Nôtre-Dame.*

TRaité Mathematique, contenant les principales Definitions, Problemes & Theoremes d'Euclide, l'Arithmetique en toutes ses parties, la Trigonometrie, la Longimetrie, la Planimetrie & la Stereometrie, les Fortifications Françoise, Hollandoise, Italienne & Espagnole, la maniere d'attaquer & de deffendre les Places, la Perspective Militaire, & la Geographie Universelle par T. Luders, in fol.

Les dix Livres d'Architecture de Vitruve par M. Perrault, fol.

Les Oeuvres Mathematiques de Stevin, in fol.

Les Oeuvres d'Architecture d'Antoine le Paultre, fol.

La Dioptrique Oculaire du P. Cherubin, fol.

Traité du Jardinage, enrichi de divers desseins de Parterres, par Boyceau, in fol.

Methode pour bien dresser toutes sortes de Comptes à parties doubles, par le sieur Irson, fol.

Les Oeuvres Mathematiques de Marolois, fol.

Tables Astronomiques de Lansberge, fol.

Fortifications du Chevalier de Ville, fol.

Artillerie de Casimir, fol.

Metoposcopie de Cardan, fol.

Fortifications de Dogen, fol.

Les Edifices Antiques de Rome par M. des Godetz, in fol.

Apiaria Philosophia Mathematica Betini, fol. 2. v.

Mydorgii Conica, fol.

Meriani Topographia Gallia, 4 vol. fol.

Euclides Commandini, fol.
Diffesa & Offesa delle Piazze, di Floriani, fol.

Livres de Navigation.

Le petit Flambeau de la Mer, ou le veritable Guide des Pilotes, 4.
Le Tresor de la Navigation, par Blondel, 4.
L'Art de naviger par le Quartier de reduction, & par le Compas de proportion, par Blondel, 4.
Le Pilote Expert, par Dacier, 4.
L'Architecture Navale qui enseigne la construction des Vaisseaux, Galleres, &c. par Dacier, 4.
Le Dictionnaire de la Marine, 8.
Traité des Pratiques Journalieres des Pilotes, par Cordier, 8.
Journal de Navigation, par Cordier, 8.
Tables Astronomiques, de Pagan, 4.
Usages des Globes, de Blaeu, 4.
Oeuvres du P. J. François.
Projet d'une nouvelle Mécanique, par Monsieur Varignon, 4.
Des principes de l'Architecture, de la Sculpture, de la Peinture & des autres Arts qui en dependent, par Monsieur Felibien, 4.
Pratique Generale & Methodique des Changes étrangers, par Monsieur Irson.

Archimedis Opera, 4.	*Barrow.*
Apollonii Pergai Conica.	
Theodosii Spherica.	

—— *Ejusdem, Lectiones Optica & Geometrica*, 4.
Argoli Ephemerides, 3. vol. 4.
—— *Primum mobile*, 2. vol. 4.
—— *Ptolomaus parvus*, 4.
—— *De diebus Criticis.*
—— *Pandosion Sphaericon*, 4.
Hobbes Opera Mathematica & Philosoph. 2. vol. 4.

Casati Mechanicorum, in 4.

De Monsieur Ozanam.

Cours de Mathematiques, qui comprend toutes les parties de cette Science, divisé en 5. vol. in 8. où sont les Elemens d'Euclide, l'Arithmetique, la Trigonometrie, les Tables de Sinus, la Geometrie, Theorique & Pratique, la Fortification, les Mécaniques, la Perspective, la Geographie, la Gnomonique ou Sciences des Cadrans : tous ces Traitez ce vendent en corps ou séparement.

Recreations Mathematiques & Physiques, qui contiennent plusieurs Problemes d'Arithmetique, de Geometrie, d'Optique, de Gnomonique, de Cosmographie, de Mécanique, de Pyrotecnie, & de Physique, avec un Traité nouveau des Horloges Elementaires, 2. v. 8.

Oeuvres d'Henrion.

Les Tables de Monroyal, 4.

Les quinze Livres des Elemens Geometriques d'Euclide, 4.

Les mêmes en deux vol. 8.

Les Memoires Mathematiques, 2. vol. 8.

L'Usage du Compas de Proportion, nouvelle Edition.

Les Triangles Spheriques de Theodose, 8.

L'Usage du Mecometre & de la Boussole, 8.

La Geometrie d'Errard, 8.

L'Arithmetique de Chauvet, par du Lac, 8.

Cosmographie Universelle, 8.

Usage des Globes, par Hües, 8.

Cosmologie du Monde, 8.

Logocanon ou Regle proportionnelle, 8.

Artillerie de Davelourt, 8.

Traité Astrologique de Rantzau, 8.